

L8 拓展篇第 7 讲—整式与分式

参考答案与试题解析

1. 化简分式: $\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6}$.

【答案】 $\frac{3}{x^2-3x}$.

2. 设 $g(x) = x^2 - 2x + 3$, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$, 求用 $g(x)$ 去除 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$ 及其余式 $r(x)$.

【答案】 $q(x) = 2x + 7$, $r(x) = 7x - 19$.

3. 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8$, 求 $\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}$.

【答案】 $\frac{13}{10}$.

4. 已知 $x + y = m$, $x^3 + y^3 = n$, $m \neq 0$, 求 $x^2 + y^2$ 的值.

【答案】 $\frac{m^2}{3} + \frac{2n}{3m}$.

【分析】 因为 $x + y = m$, 所以

$$m^3 = (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = n + 3mxy,$$

$$\text{所以 } xy = \frac{m^2}{3} - \frac{n}{3m}.$$

$$\text{所以 } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = m^2 - 2\left(\frac{m^2}{3} - \frac{n}{3m}\right) = \frac{m^2}{3} + \frac{2n}{3m}.$$

5. 已知实数 a 、 b 、 x 、 y 满足 $a+b=x+y=2$, $ax+by=5$, 求 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$ 的值.

【答案】 -5.

【分析】 由 $a+b=x+y=2$, 得 $(a+b)(x+y)=ax+by+ay+bx=4$.

因为 $ax+by=5$, 所以 $ay+bx=-1$.

$$\text{因而, } (a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=(ay+bx)(ax+by)=-5.$$

6. 已知 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, 证明 $a=b=c$.

【答案】 略.

【分析】因为 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$,

所以 $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0$,

即 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$,

因此 $a-b=b-c=c-a=0$, 即 $a=b=c$.

7. 已知 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, 且 a 、 b 、 c 、 d 都是正数, 求证: $a=b=c=d$.

【答案】略。

【分析】由已知可得 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 0$,

$(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd = 0$,

所以 $(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$.

因为 $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$, $(c^2 - d^2)^2 \geq 0$, $(ab - cd)^2 \geq 0$,

所以 $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = ab - cd = 0$,

所以 $(a+b)(a-b) = (c+d)(c-d) = 0$.

又因为 a 、 b 、 c 、 d 都为正数, 所以 $a+b \neq 0$, $c+d \neq 0$,

所以 $a=b$, $c=d$.

所以 $ab - cd = a^2 - c^2 = (a+c)(a-c) = 0$,

所以 $a=c$. 故 $a=b=c=d$ 成立.

8. 求一个关于 x 的二次三项式 $f(x)$, 它被 $x-1$ 除余 2; 被 $(x-2)$ 除余 8; 并且被 $x+1$ 整除.

【答案】 $\frac{5}{3}x^2 + x - \frac{2}{3}$.

【分析】设这个二次三项式为 $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\text{则 } \begin{cases} f(1) = a + b + c = 2, & \text{①} \\ f(2) = 4a + 2b + c = 8, & \text{②} \\ f(-1) = a - b + c = 0, & \text{③} \end{cases}$$

① - ③得: $b = 1$,

代入②、③得

$$\begin{cases} 4a + c = 6, & \text{④} \\ a + c = 1, & \text{⑤} \end{cases}$$

④ - ⑤得 : $a = \frac{5}{3},$

代入⑤得: $c = -\frac{2}{3}.$

所求二次三项式为 $\frac{5}{3}x^2 + x - \frac{2}{3}.$