



1.2.1.3 题型3: 均值不等式的轮换对称

【例1】 难度 ★☆☆

已知 $a, b > 0$, $a + b = 3$, 则 ab 的最大值为_____.

【例2】 难度 ★☆☆

(2011·浙江)若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $x + y$ 的最大值是_____.

【例3】 难度 ★☆☆

(2014年上海高考真题5)若实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.

4 ☆☆☆

已知正数 a, b 满足 $a + 2b = 1$, 则 $a^2 + 6ab + 4b^2$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. 1 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

【例 5】 难度 ☆☆☆

已知正实数 a, b 满足 $a^2 + 3ab + 9b^2 = 6$, 则 $a + 3b$ 的最大值为 ()

- A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

【例 6】 难度 ☆☆☆

(2019 年上海高考真题 7) 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $\frac{1}{x} + 2y = 3$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 _____.

【例 7】 难度 ☆☆☆

(2013 湖南卷高考真题理科第 10 题) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a + 2b + 3c = 6$, 则 $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ 的最小值为 _____.

8

☆☆☆

(2020 年天津高考真题 14) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为 _____.

【例 9】 难度 ☆☆☆

(多选题) 早在公元前 6 世纪, 毕达哥拉斯学派已经知道算术中项、几何中项以及调和中项, 毕达哥拉斯学派哲学家阿契塔在《论音乐》中定义了上述三类中项, 后人在此基础上推导出一个基本不等式链, 即已知正实数 a, b , 有 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b + \sqrt{ab} = 1$, 请利用上述不等关系, 判断下列说法正确的是

()

A. $\frac{a^2+b^2}{ab}$ 的最小值为 2B. ab 的最大值为 $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值为 6D. $a + b$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$

【例 10】 难度 ☆☆☆

(2022 年新高考 II 卷真题 12 题) (多选题) 若 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()

A. $x + y \leq 1$ B. $x + y \geq -2$ C. $x^2 + y^2 \leq 2$ D. $x^2 + y^2 \geq 1$