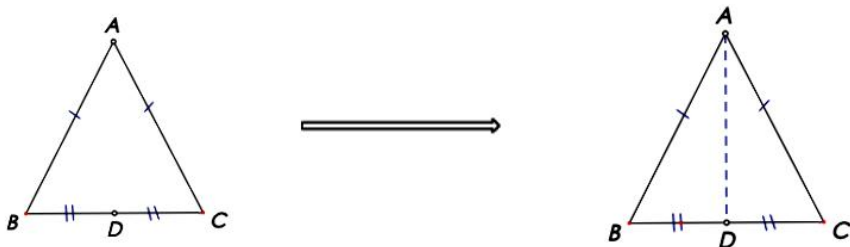


1.4 构造等腰三角形的三线合一

【知识要点】

等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合（简称“三线合一”）

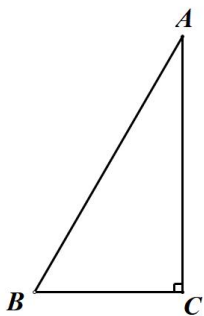


结论：① $AD \perp BC$ ② $\angle BAD = \angle CAD$ ③出现两个直角三角形



青铜级别

【例1】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 2BC$ ，求证： $\angle BAC = 30^\circ$



【答案】延长 BC 到 B_1 ，使 $B_1C = BC$ ，连接 AB_1 . 由于 B, C, B_1 在一直线上，

$\angle BCB_1$ 是平角，又 $\angle ACB = 90^\circ$ ，所以 $\angle ACB_1 = 90^\circ$.

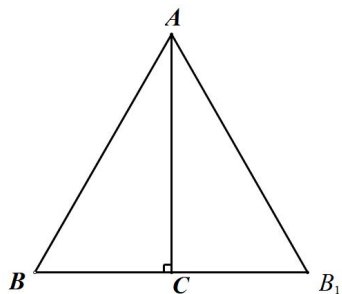
在 $Rt\triangle ACB$ 与 $Rt\triangle ACB_1$ 中，

因为 $AC = AC$ ， $BC = B_1C$ ，所以 $Rt\triangle ACB \cong Rt\triangle ACB_1$ (SAS)，

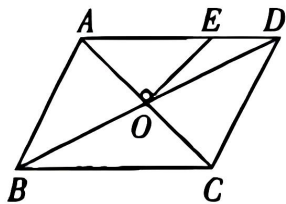
所以 $AB = AB_1$ (全等三角形的对应边相等)。

所以 $BB_1 = 2BC = AB = AB_1$ ，即得 $\triangle ABB_1$ 是等边三角形。

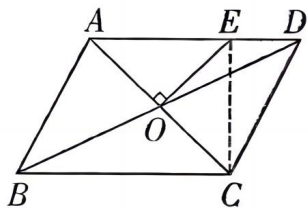
因此 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BAC = 90^\circ - \angle ABC = 30^\circ$ 。



【例2】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，过点 O 作 $OE \perp AC$ 交 AD 于点 E ，若 $AE=4$ ， $DE=2$ ， $AB=2\sqrt{5}$ ，求 AC 的长。



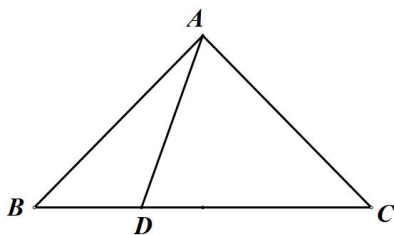
【答案】解：如解图，连接 CE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\therefore AO=CO$ ， $CD=AB=2\sqrt{5}$ ， $\because OE \perp AC$ ，
 $\therefore OE$ 垂直平分 AC ， $\therefore CE=AE=4$ ， $\because DE=2$ ， $\therefore CE^2+DE^2=4^2+2^2=(2\sqrt{5})^2=CD^2$ ，
 $\therefore \angle CED=90^\circ$ ， $\therefore \angle AEC=90^\circ$ ， $\therefore \triangle AEC$ 是等腰直角三角形， $\therefore AC=\sqrt{2}AE=4\sqrt{2}$ 。

【例3】 D 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的一点，求证： $AD^2 = AB^2 - BD \cdot DC$

(斯特瓦尔特定理推论)

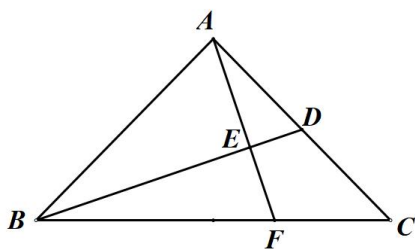


【答案】思路：过点 A 构造等腰三角形三线合一，利用勾股定理可证。



钻石级别

【例4】如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ， D 为 AC 中点， $AE \perp BD$ 于 E ，延长 AE 交 BC 于 F ，求证： $\angle ADB=\angle CDF$.
(安徽省竞赛试题)



【答案】提示：过点 A 作 $\angle A$ 的平分线 AG 交 BC 于 G ，先证明 $\triangle ABG \cong \triangle ACF$ ，再证明 $\triangle AGD \cong \triangle CFD$
具体过程见课程视频



王者级别

【例5】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC > BC$ ， D 是 AB 的中点， E 为直线 AC 上一动点，连接 DE ，过点 D 作 $DF \perp DE$ ，交直线 BC 于点 F ，连接 EF 。

- (1) 如图1，当点 E 是线段 AC 的中点时， $AE=2$ ， $BF=1$ ，求 EF 的长；
- (2) 当点 E 在线段 CA 的延长线上时，依题意补全图形2，用等式表示 AE ， EF ， BF 之间的数量关系，并证明。

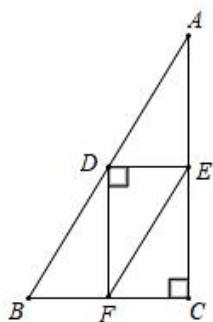


图1

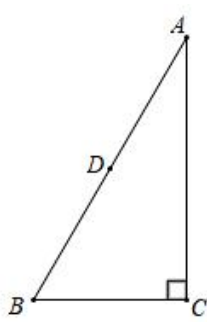


图2

【答案】(1) $\because D$ 是 AB 的中点， E 是线段 AC 的中点， $\therefore DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ ，

$\because \angle ACB=90^\circ$ ， $\therefore \angle DEC=90^\circ$ ， $\because DF \perp DE$ ， $\therefore \angle EDF=90^\circ$ ， $\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是矩形，

$\therefore DE=CF=\frac{1}{2}BC$ ， $\therefore CF=BF=1$ ， $\because CE=AE=2$ ，

$\therefore EF=\sqrt{CF^2+CE^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ；

(2) $AE^2+BF^2=EF^2$ 。

证明：过点 B 作 $BM \parallel AC$ ，与 ED 的延长线交于点 M ，连接 MF ，

则 $\angle AED=\angle BMD$ ， $\angle CBM=\angle ACB=90^\circ$ ， $\because D$ 点是 AB 的中点， $\therefore AD=BD$ ，