

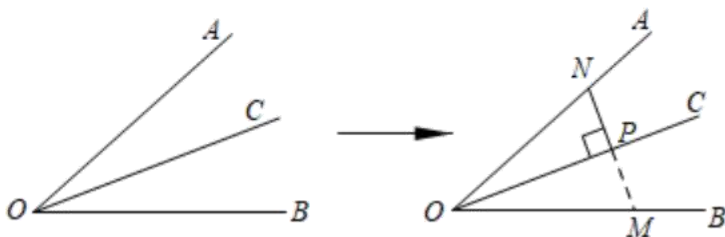
2.2.构造角平分线的垂线

【知识要点】

角平分线模型特点：①有角平分线；②有角平分线的垂线段；

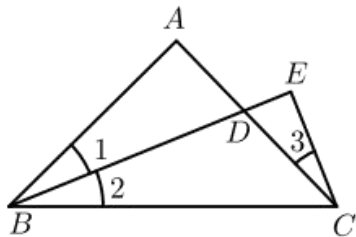
辅助线做法：延长角平分线的垂线；

结论：①以角平分线为界，两边三角形全等；②全等三角形对应边相等，对应角相等；



青铜级别

【例1】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ， $CE \perp BE$ ，求证： $CE = \frac{1}{2}BD$.



【答案】证明见解析

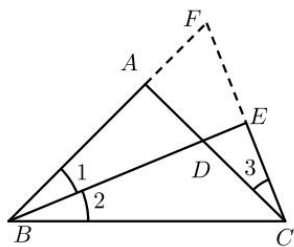
【解析】延长 CE 、 BA 相交于 F ，在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle BEF$ 中，
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ BE = BE \\ \angle BEF = \angle BEC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEC \cong \triangle BEF(ASA), CE = EF = \frac{1}{2}CF,$$

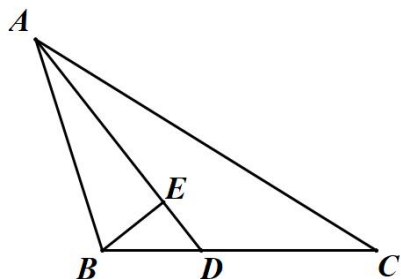
$\because BE \perp CE$, $\angle 1 = 90^\circ - \angle F$, 同理 $\angle 3 = 90^\circ - \angle F$, $\angle 1 = \angle 3$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 中，
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ BA = AC \\ \angle BAC = \angle FAC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF(ASA), \therefore BD = CF, \therefore CE = \frac{1}{2}BD.$$

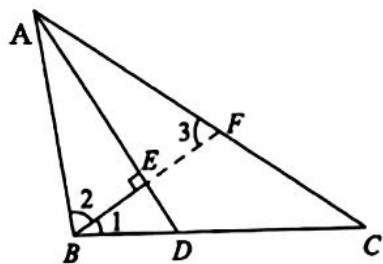


【例2】如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=3\angle C$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, $BE \perp AD$ 于点 E , 求证: $BE = \frac{1}{2}(AC - AB)$.



【答案】证明见解析

【解析】延长 BE 交 AC 于点 F , $\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的角平分线, $\therefore \angle BAD = \angle CAD$,



$\because AE = AE$, $\therefore \angle BAE = \angle FAE$, 则 $\triangle AEB \cong \triangle AEF$,

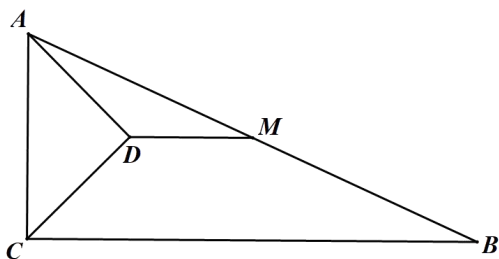
$\therefore AB = AF$, $BE = EF$, $\angle 2 = \angle 3$, $\therefore AC - AB = AC - AF = FC$.

$\because \angle ABC = 3\angle C$, $\therefore \angle 2 + \angle 1 = \angle 3 + \angle 1 = \angle 1 + \angle C + \angle 1 = 3\angle C$,

$\therefore 2\angle 1 = 2\angle C$, 即 $\angle 1 = \angle C$, $\therefore BF = FC = 2BE$,

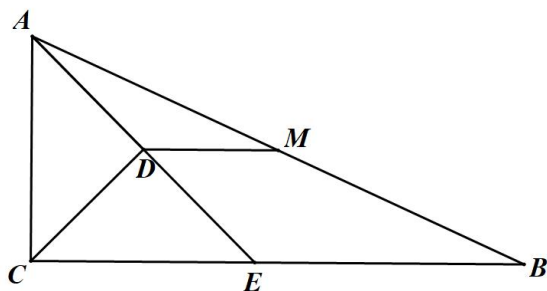
$\therefore BE = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}(AC - AB)$

【例3】如图，在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 平分 $\angle ACB$ ， $AD \perp CD$ ，垂足为点 D ，点 M 是 AB 的中点，如果 $AB = 20$ ， $AC = 10$ ，那么 $DM =$ _____ .



【答案】 $5\sqrt{3} - 5$

【解析】 延长 AD 交 BC 于 E ，如图，



在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3} .$$

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ， $\therefore \angle ACD = \angle ECD$ ， $\therefore CD \perp AD$ ，

$\therefore \angle CDA = \angle CDE = 90^\circ$ ，在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CDE$ 中，
$$\begin{cases} \angle ACD = \angle ECD \\ CD = CD \\ \angle CDA = \angle CDE \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle CDA \cong \triangle CDE (\text{ASA})$ ， $\therefore AD = ED$ ， $CE = CA = 10$ ，

$\because$ 点 M 是 AB 的中点， $\therefore DM$ 为 $\triangle ABE$ 的中位线，

$$\therefore DM = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} (BC - CE) = \frac{1}{2} \times (10\sqrt{3} - 10) = 5\sqrt{3} - 5 .$$



钻石级别

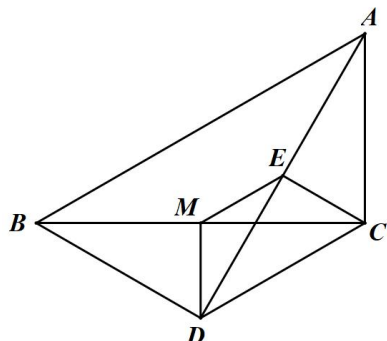
【例 4】(2021 年安徽中考真题第 10 题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 分别过点 B, C 作 $\angle BAC$ 平分线的垂线, 垂足分别为点 D, E , BC 的中点是 M , 连接 CD, MD, ME . 则下列结论错误的是 ().

A. $CD = 2ME$

B. $ME \parallel AB$

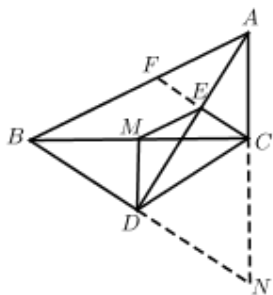
C. $BD = CD$

D. $ME = MD$



【答案】A

【解析】延长 CE 交 AB 于点 F , 延长 BD 交 AC 的延长线于点 N ,



$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC, \therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because BD \perp AD, CE \perp AD, \therefore \angle BDA = \angle NDA = \angle FEA = \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ADB \text{ 和 } \triangle ADN \text{ 中, } \begin{cases} \angle BAD = \angle NAD \\ AD = AD \\ \angle ADB = \angle ADN \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADN (\text{ASA}), \therefore AB = AN, BD = ND,$$

$$\text{在 } \triangle AEF \text{ 和 } \triangle AEC \text{ 中, } \begin{cases} \angle FAE = \angle CAE \\ AE = AE \\ \angle AEF = \angle AEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEC, \therefore AF = AC, EF = CE,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle BCN = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = BD = DN, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\because \text{点 } M \text{ 是 } BC \text{ 的中点, } \therefore BM = CM,$$

$$\therefore ME \text{ 是 } \triangle BCF \text{ 的中位线, } MD \text{ 是 } \triangle BCN \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore ME \parallel AB, ME = \frac{1}{2}BF, MD = \frac{1}{2}CN, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\because BF = AB - AF = AB - AC, \therefore ME = \frac{1}{2}(AB - AC),$$

$$\because CN = AN - AC = AB - AC, \therefore MD = \frac{1}{2}(AB - AC),$$

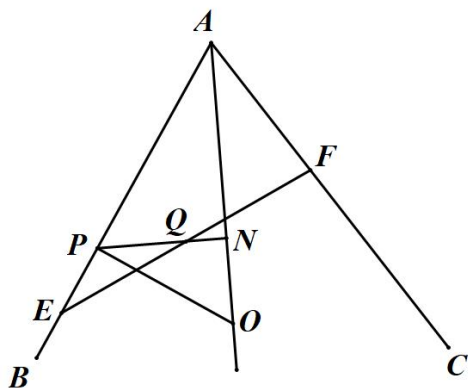
$\therefore ME = MD$, 故 D 正确;

由已知条件无法得到 CD 与 ME 之间的数量关系, 故 A 错误.



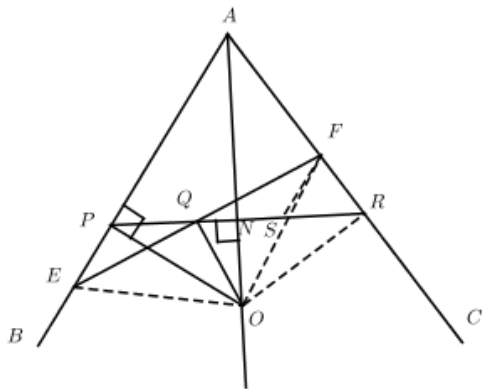
王者级别

【例 5】 如图, 已知 O 为 $\angle BAC$ 平分线上一点, $OP \perp AB$ 于 P , $PN \perp AO$ 于 N , Q 为 NP 上一点, 过 Q 点作一直线分别交 AB 、 AC 于 E 、 F , 且 $QE = QF$, 求证: $\angle OQE = 90^\circ$.



【答案】 证明见解析.

【解析】 方法一: 延长 PN 交 AC 于 R , 连接 OE 、 OF 、 OR , 过 F 做 $FS \parallel AB$ 交 PR 于 S ,



易得 $\triangle APN \cong \triangle ARN$, $\therefore AP = AR$, $\therefore \angle APR = \angle ARP$, $\triangle APO \cong \triangle ARO$,

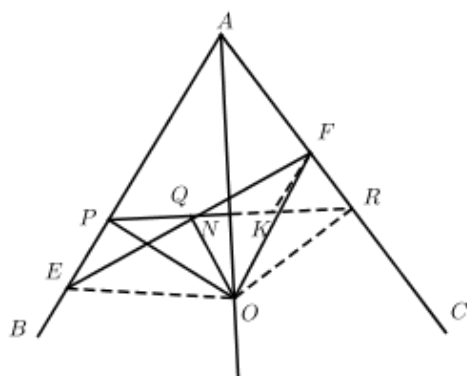
$\therefore \angle APO = \angle ARO = 90^\circ$, $OP = OR$, $\because FS \parallel AB$, $\therefore \angle FSR = \angle APR$, $\therefore \angle FSR = \angle FRS$,

$\therefore FS = FR$, $\because EP \parallel FS$, $QE = QF$, $\therefore \triangle EPQ \cong \triangle FSQ$,

$\therefore PE = SF$, $\therefore PE = RF$, 又 $\because OP = OR$, $\angle OPE = \angle ORF$, $\therefore \triangle OPE \cong \triangle ORF$,

$\therefore OE = OF$, 又 $\because QE = QF$, $\therefore OQ$ 垂直平分 EF , $\therefore \angle OQE = 90^\circ$.

方法二：延长 PN 交 AC 于点 R ，连接 OR ， OE ，



$\because AO$ 平分 $\angle BAC$ ，且 $AN \perp PQ$ ， $\therefore AP = AR$ ，则 $\triangle APO \cong \triangle ARO$ (SAS)，

$\therefore OR \perp AC$ ， $OP = OR$ ，过点 F 作 $FK \parallel AB$ 交 PR 于点 K ， $\because Q$ 是 EF 的中点，

$\therefore \triangle PQE \cong \triangle KQF$ (AAS)， $\therefore PE = FK$ ， $\because FK \parallel AB$ ，

则 $\angle FKR = \angle APR = \angle ARP$ ，则 $FK = FR = PE$ ， $\therefore \text{Rt} \triangle OPE \cong \text{Rt} \triangle ORF$ (SAS)，

$\therefore OE = OF$ ， $\because QE = QF$ ， $\therefore OQ \perp EF$ ， $\therefore \angle OQE = 90^\circ$ 。