

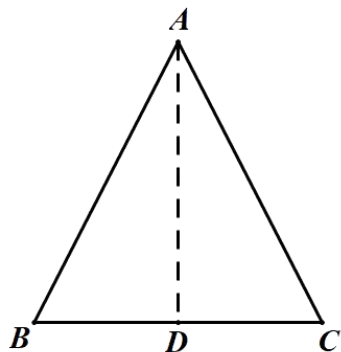
## 第三章 与等腰三角形相关的辅助线

### 3.1 等腰和等腰直角三角形中基本辅助线做法

#### 【知识要点】

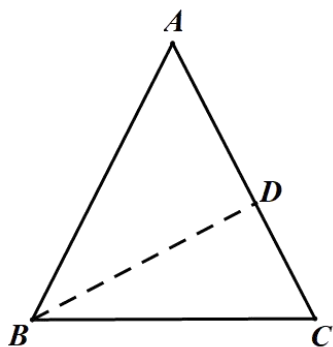
#### 1. 利用“三线合一”性质作辅助线

如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，过点 $A$ 作 $AD \perp BC$ 于点 $D$ ，  
 $AD \perp BC$ ， $\angle BAD = \angle CAD$ ， $BD = CD$ ，



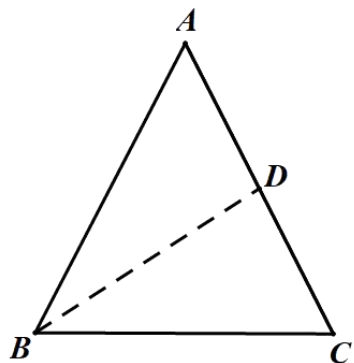
#### 2. 作腰上的高

在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，过点 $B$ 作 $BD \perp AC$ 于点 $D$ ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ 。



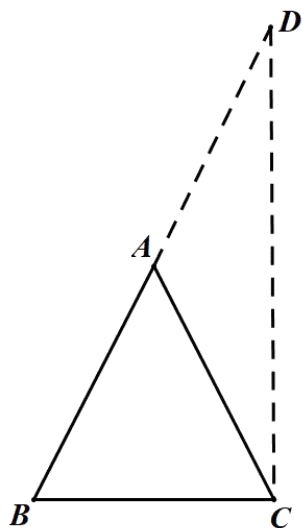
### 3. 作腰上的中线

如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，过点 $B$ 作 $AC$ 边上的中线 $BD$ ，则 $AD = CD$ ， $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD}$ 。



### 4. 倍长一腰，构造直角三角形.

如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，延长 $BA$ 至点 $D$ ，使 $AD = AB$ ，连接 $CD$ ，则 $AB = AD = AC$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ 。



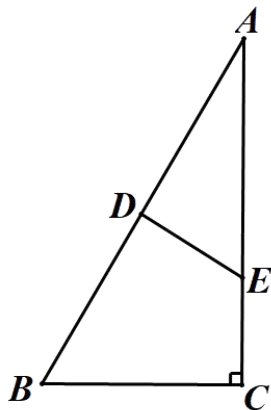


青铜级别

【例 1】在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AB$  的垂直平分线分别交  $AB$  和  $AC$  于点  $D$ 、 $E$ 。

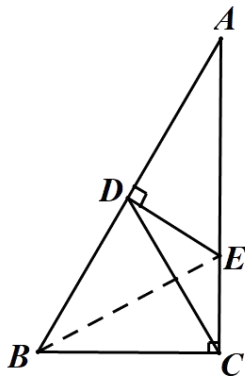
(1) 求证： $AE = 2CE$ 。

(2) 连接  $CD$ ，请判断  $\triangle BCD$  的形状，并说明理由。



【答案】(1) 证明见解析；(2)  $\triangle DBC$  为等边三角形。

【解析】(1) 连  $BE$ ，



$\because ED$  垂直平分  $AB$ ， $\therefore EA = EB$ ， $\therefore \angle EAB = \angle EBA$ ，

$\because \angle A = 30^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle EBC = 30^\circ$ ，

$\because$  在  $\text{Rt} \triangle EBC$  中， $\angle EBC = 30^\circ$ ， $\therefore BE = 2EC$ ，

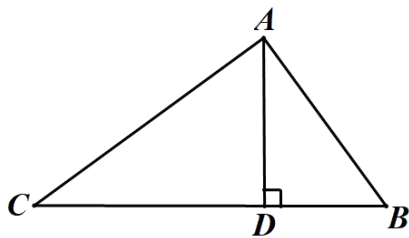
$\because EB = EA$ ， $\therefore AE = 2CE$ 。

(2)  $\because ED$  垂直平分  $AB$ ， $\therefore AD = DB$ ，

$\because$  在  $\text{Rt} \triangle ACB$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\therefore CD = BD$ ，

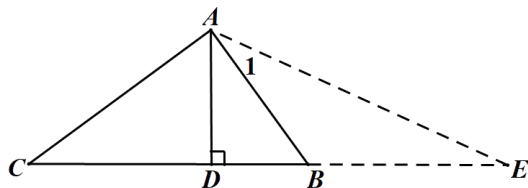
又  $\because \angle ABC = 60^\circ$ ， $\therefore \triangle DBC$  为等边三角形。

【例2】如图， $\triangle ABC$ 中  $AD \perp BC$ 于  $D$ ， $\angle B = 2\angle C$ ，求证： $AB + BD = CD$



【答案】见解析

【解析】延长  $CB$ 到点  $E$ ，使得  $BE = AB$ ，连接  $AE$ 得 $\triangle ABE$ 为等腰三角形



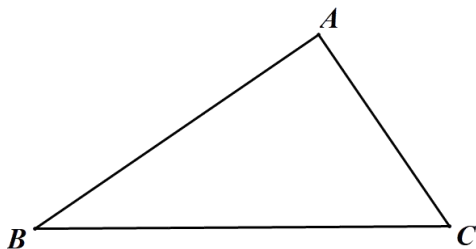
$$\therefore \angle 1 = \angle E, \angle B = 2\angle E$$

$$\because \angle B = 2\angle C, \therefore \angle C = \angle E \quad \therefore \triangle ACE \text{ 为等腰三角形}$$

$$\because AD \perp BC, \therefore CD = DE$$

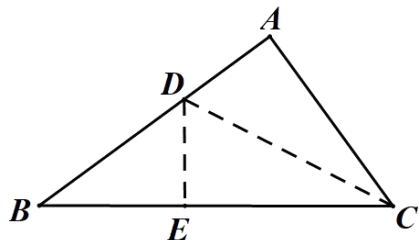
$$\therefore AB + BD = BE + BD = DE = CD$$

【例3】如图，在  $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 2\angle B$ ， $BC = 2AC$ ．求证： $\angle A = 90^\circ$ ．



【答案】见解析

【解析】作  $CD$ 平分  $\angle ACB$ 交  $AB$ 于  $D$ ，过  $D$ 作  $DE \perp BC$ 于  $E$ ，



$$\because \angle ACB = 2\angle B, \quad CD \text{ 平分 } \angle ACB, \quad \therefore \angle B = \angle BCD, \text{ 即 } \triangle DBC \text{ 是等腰三角形}$$

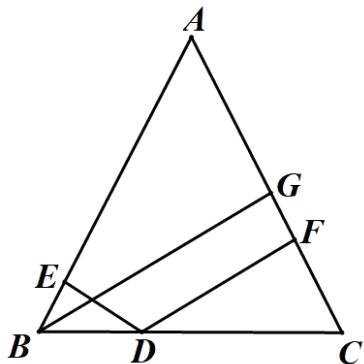
$$\because DE \perp BC, \quad \therefore BC = 2CE$$

$$\text{又 } BC = 2AC, \quad \therefore AC = CE, \quad \text{易证 } \triangle ACD \cong \triangle ECD(SAS) \therefore \angle A = \angle DEC = 90^\circ$$



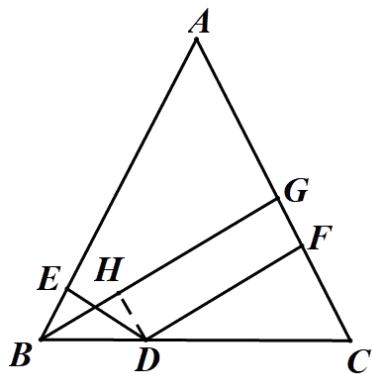
钻石级别

【例4】如图，在等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $BC$ 上任取一点 $D$ ，过点 $D$ 作 $DE \perp AB$ 于点 $E$ ， $DF \perp AC$ 于点 $F$ ，过点 $B$ 作腰 $AC$ 边上的高 $BG$ ，求证： $DE + DF = BG$ 。



【答案】见解析

【解析】证明：如下图，过点 $D$ 作 $DH \parallel AC$ 交 $BG$ 于点 $H$ ，



$\because BG \perp AC, \therefore DH \perp BG,$

又 $\because DF \perp AC, \therefore$ 四边形 $DHGF$ 为矩形， $\therefore DF = HG$

$\because DH \parallel AC, \therefore \angle BDH = \angle C,$

又 $\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C, \therefore \angle ABC = \angle BDH$

又 $\because \angle BED = \angle BHD = 90^\circ, BD = DB, \therefore \triangle BDH \cong \triangle DBE (AAS),$

$\therefore DE = BH, \because BH + HC = BG, \therefore DE + DF = BG$

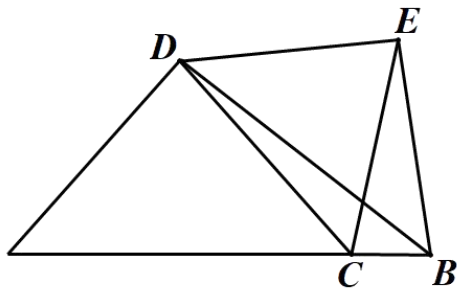


# 王者级别

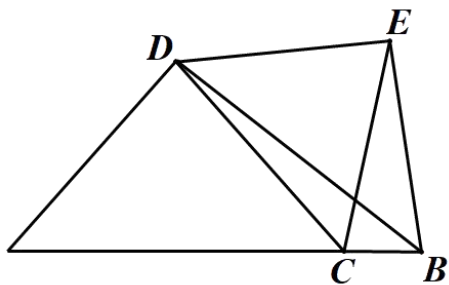
**【例5】**点  $C$  为线段  $AB$  上一点，以  $AC$  为斜边作等腰  $Rt\triangle ADC$ ，连接  $BD$ 。在  $\triangle ABD$  外侧，以  $BD$  为斜边作等腰  $Rt\triangle BED$ ，连接  $EC$ 。

(1) 如图，当  $\angle DBA = 30^\circ$  时：①求证：  $AC = BD$ ；

②判断线段  $EC$  与  $EB$  的数量关系，并证明；



(2) 如图，当  $0^\circ < \angle DBA < 45^\circ$  时， $EC$  与  $EB$  的数量关系是否保持不变？如果不变，请你证明  $EC = EB$ 。

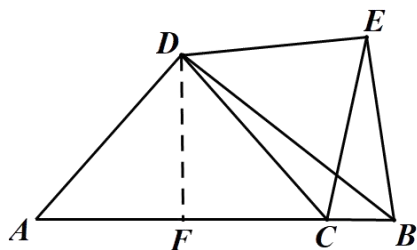


**【答案】**(1) ①证明见解析；②  $EC = EB$ ，证明见解析；(2)  $EC$  与  $EB$  的数量关系保持不变，证明见解析。

**【解析】**(1) ①如图，过点  $D$  作  $DF \perp AB$  于点  $F$ ， $\because Rt\triangle ADC$  是等腰三角形，

$\therefore DF$  是斜边  $AC$  上的中线， $\therefore DF = \frac{1}{2}AC$ ，又  $\because$  在  $Rt\triangle BDF$  中， $\angle DBA = 30^\circ$ ，

$\therefore DF = \frac{1}{2}BD$ ， $\therefore \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$ ，即  $AC = BD$ ；



②  $EC = EB$ ，证明如下：

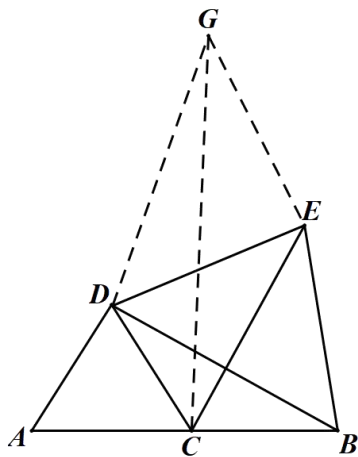
$\because Rt\triangle ADC$  和  $Rt\triangle BED$  都是等腰直角三角形，

$\therefore CD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$ ， $DE = EB = \frac{\sqrt{2}}{2}BD$ ， $\angle ACD = \angle BDE = 45^\circ$ ，

由①知,  $AC = BD$ ,  $\therefore CD = DE$ ,  
 $\because \angle DBA = 30^\circ$ ,  $\therefore \angle BDC = \angle ACD - \angle DBA = 15^\circ$ ,  
 $\therefore \angle CDE = \angle BDC + \angle BDE = 60^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle CDE$  是等边三角形,  $\therefore EC = DE = EB$ ;

(2)  $EC$  与  $EB$  的数量关系保持不变, 证明如下:

如图, 过点  $D$  作  $BD$  的垂线, 交  $BE$  延长线于点  $G$ , 连接  $CG$ ,



$\therefore \angle BDG = 90^\circ$ ,  
 $\because Rt\triangle ADC$  是等腰直角三角形,  
 $\therefore AD = CD, \angle ADC = 90^\circ, \angle A = \angle ACD = 45^\circ$ ,  
 $\therefore \angle ADC + \angle BDC = \angle BDG + \angle BDC$ , 即  $\angle ADB = \angle CDG$ ,  
 $\because Rt\triangle BED$  是等腰直角三角形,  
 $\therefore \angle DBE = 45^\circ, DE \perp BE$ ,  
 $\therefore \triangle BDG$  是等腰直角三角形, 且  $BD = GD$ ,  
 $\therefore EB = EG$  (等腰三角形的三线合一),

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle CGD$  中, 
$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADB = \angle CDG \\ BD = GD \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle CGD (SAS),$$

$\therefore \angle A = \angle DCG = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle ACG = \angle ACD + \angle DCG = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle BCG = 180^\circ - \angle ACG = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle BCG$  是直角三角形, 又  $\because EB = EG$ ,  $\therefore$  点  $E$  是  $BG$  的中点, 即  $EC$  是斜边  $BG$  上的中线,  
 $\therefore EC = EB$ .