

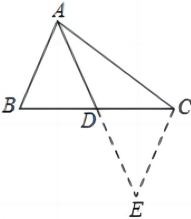
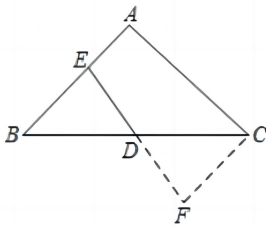
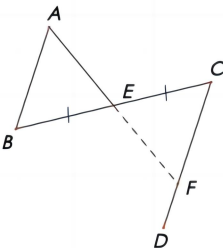
模块一 与中点有关的辅助线

【知识要点】

1. 已知任意三角形一边上的中点，可以考虑：
 - (1) 倍长中线或类中线（与中点有关的线段）构造全等三角形.
 - (2) 三角形中位线定理.
2. 遇到直角三角形，考虑斜边中线.
3. 遇到等腰三角形，考虑三线合一.

1.1 倍长中线或类中线

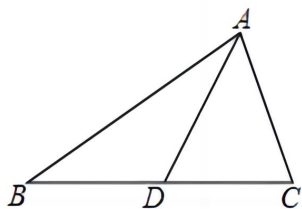
【知识要点】

倍长中线		【已知】AD是$\triangle ABC$的中线. 【辅助线语言】延长AD至E, 使得$DE = AD$, 连接CE, 【结论】$\triangle ABD \cong \triangle ECD$, $AB \parallel CE$.
倍长类中线		【已知】在$\triangle ABC$中, 点D是BC的中点. 【辅助线语言】延长ED至F, 使得$DF = DE$, 连接CF, 【结论】$\triangle BDE \cong \triangle CDF$, $BE \parallel CF$.
平行线+所截线段的中点		已知：$AB \parallel CD$, E是BC中点 方法：延长AE与CD交于点F 。结论：① $\triangle CEF \cong \triangle BEA$(AAS 或 ASA) ②$AB = FC$



青铜级别

【例1】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=8$, $AC=5$, AD是 $\triangle ABC$ 的中线, 则AD的取值范围是 ()



A. $3 < AD < 13$

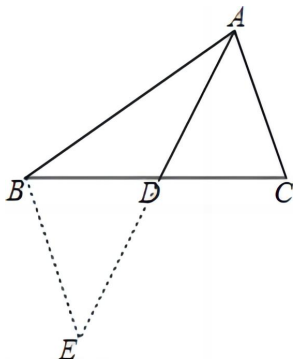
B. $1.5 < AD < 6.5$

C. $2.5 < AD < 7.5$

D. $10 < AD < 16$

【答案】B

【解析】延长AD到E, 使 $AD=DE$, 连结BE.



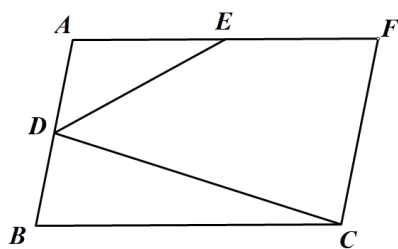
$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore BD=CD$.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中,
$$\begin{cases} CD = BD \\ \angle ADC = \angle EDB, \therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB \text{ (SAS)}, \therefore AC=BE. \\ AD = DE \end{cases}$$

$\because AB-BE < AE < AB+BE$, $\therefore AB-AC < 2AD < AB+AC$. $\because AB=8$, $AC=5$, $\therefore 1.5 < AD < 6.5$.

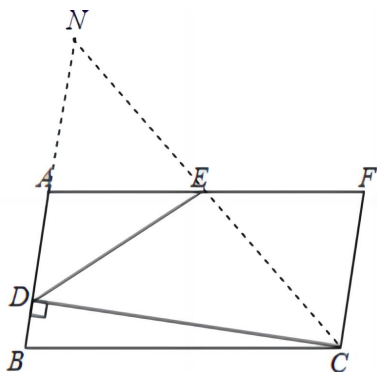
【例 2】 在平行四边形 $ABCF$ 中, $BC=2AB$, $CD \perp AB$ 于点 D , 点 E 为 AF 的中点, 若 $\angle ADE = 50^\circ$, 则 $\angle B$ 的度数是 ()

- A. 50° B. 60° C. 70° D. 80°



【答案】 D

【解析】 连结 CE , 并延长 CE , 交 BA 的延长线于点 N ,



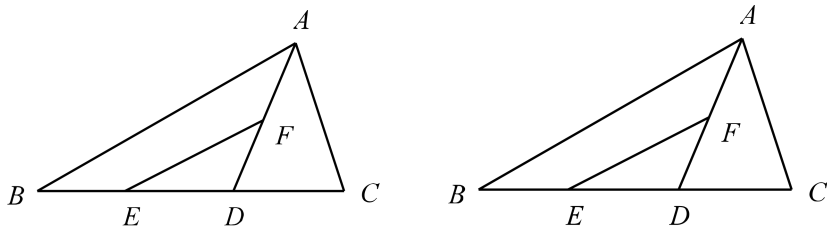
$\because$ 四边形 $ABCF$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CF$, $AB=CF$, $\therefore \angle NAE = \angle F$,

$\because$ 点 E 是 AF 中点, $\therefore AE=FE$,

在 $\triangle NAE$ 和 $\triangle CFE$ 中,
$$\begin{cases} \angle NAE = \angle F \\ AE = FE \\ \angle AEN = \angle FEC \end{cases},$$

$\therefore \triangle NAE \cong \triangle CFE$ (ASA), $\therefore NE = CE, NA = CF$,
 $\because AB = CF, \therefore NA = AB$, 即 $BN = 2AB$, $\because BC = 2AB, \therefore BC = BN, \angle N = \angle NCB$,
 $\because CD \perp AB$ 于 D , 即 $\angle NDC = 90^\circ$ 且 $NE = CE, \therefore DE = \frac{1}{2} NC = NE$,
 $\therefore \angle N = \angle NDE = 50^\circ = \angle NCB, \therefore \angle B = 80^\circ$. 故选: D .

【例 3】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, 点 E, F 分别在 BD, AD 上, 且 $DE = CD, EF = AC$.
 求证: $EF \parallel AB$. (请尝试用两种方法证明)



【答案】

方法一: 倍长 AD 到点 G , 连接 EG .

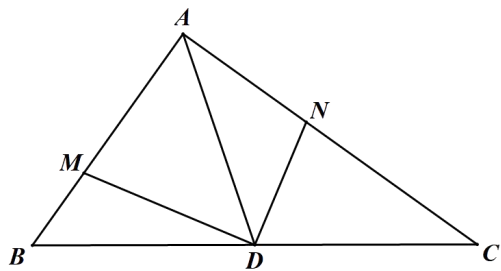
方法一: 倍长 FD 到点 M , 连接 CM .



钻石级别

【例 4】 已知 $\triangle ABC$ 中, $BD = CD, \angle MDN = 90^\circ, BM^2 + CN^2 = DM^2 + DN^2$,

求证: $AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{4}$



【答案】 倍长 ND 到点 E , 连接 EB, EM, MN

$\triangle BED \cong \triangle CND, \therefore BE = CN$

$BM^2 + CN^2 = BM^2 + BE^2 = DM^2 + DN^2 = MN^2$

又 $\because MD$ 垂直平分 $EN, MN = ME$

$\therefore BM^2 + CN^2 = ME^2 \therefore \angle MBE = 90^\circ$

又 $\because \angle C = \angle CBE, \therefore AC \parallel BE$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \therefore AD = \frac{1}{2} BC, \therefore AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{4}$



王者级别

【例 5】在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $AD = DE, AC = BC, \angle BAC = \angle ABC, \angle DAE = \angle DEA,$

$\angle ACB = \angle ADE = 90^\circ$, 点 M 是 BE 的中点, 连接 CM, DM .

(1) 如图 1, 当点 D 在 AB 上, 点 E 在 AC 上时, 求证: $DM = CM, DM \perp CM$.

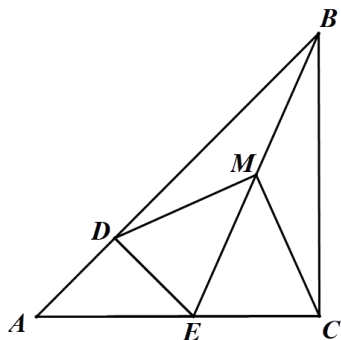


图 1

(2) 如图 2, 当点 D 在 CA 延长线上时, (1) 中结论仍然成立, 请补全图形 (不用证明).

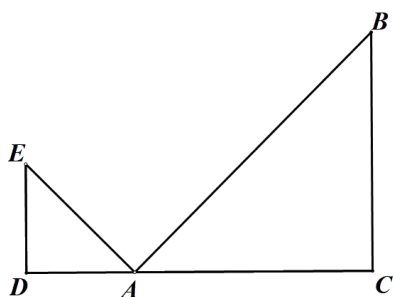


图 2

(3) 如图 3, 当 $ED \parallel AB$ 时, 上述结论仍然成立, 请加以证明.

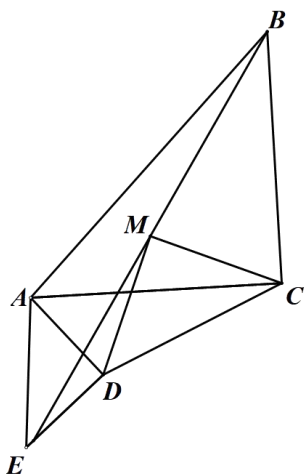


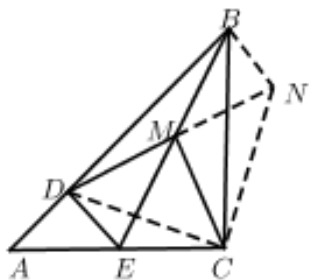
图 3

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 画图见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 延长DM至N, 使MN = MD, 连接NB, NC,



易证 $\triangle DME \cong \triangle NMB$ (SAS), $\therefore DE = NB$, $DE \parallel NB$, $\because DE = DA$, $\therefore DA = BN$,

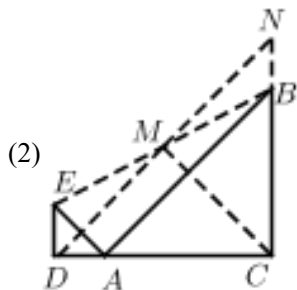
易证 $\angle A = \angle ABC = 45^\circ$, $\because DE \parallel AB$, $\angle ADE = 90^\circ$, $\therefore \angle DBN = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCN$ 中,
$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle DAC = \angle NBC \\ DA = BN \end{cases}$$

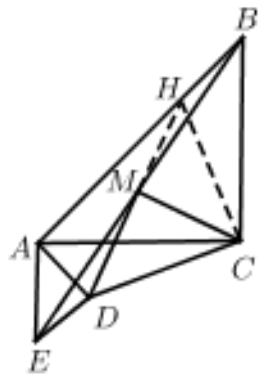
$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCN$ (SAS), $\therefore DC = NC$,

在 $\triangle CMD$ 和 $\triangle CMN$ 中,
$$\begin{cases} CM = CM \\ DC = NC \\ DM = NM \end{cases}$$
, $\therefore \triangle CMD \cong \triangle CMN$ (SSS),

$\therefore \angle DMC = \angle NMC = 90^\circ$, 易证 $\triangle DMC$ 为等腰RT $\triangle$, 即可证出



(3) 与 (1) 同理, 延长DM交AB于H, 连接CH, $ED \parallel AB$,



M为BE中点 $\rightarrow \triangle MDE \cong \triangle MHB$ (AAS),