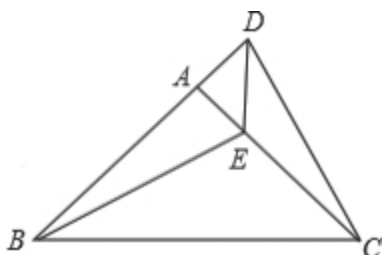


L8 拓展篇第一讲—全等三角形

参考答案与试题解析

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， E 是 AC 边上的一点，延长 BA 至 D ，使 $AD = AE$ ，连接 DE ， CD 。
- (1) 图中是否存在两个三角形全等？如果存在请写出哪两个三角形全等，并且证明；如果不存在，请说明理由；
- (2) 若 $\angle CBE = 30^\circ$ ，求 $\angle ADC$ 的度数。



【答案】(1) 存在两个三角形全等，它们是 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，证明略；(2) 75° 。

【分析】(1) 存在两个三角形全等，它们是 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中。

$$\therefore \begin{cases} AD = AE \\ \angle BAE = \angle CAD, \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD(\text{SAS})$;

(2) $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 45^\circ$ ，

$\because \triangle ABE \cong \triangle ACD$ 。

$\therefore \angle ABE = \angle ACD$ ，

$\because \angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD = 15^\circ$ ，

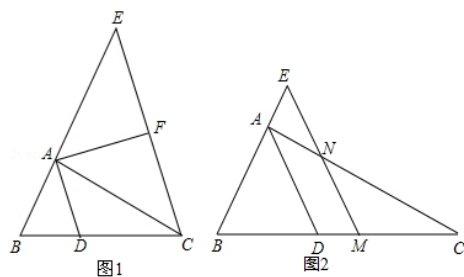
$\because \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD$ ，

$\therefore \angle ADC = \angle BAC - \angle ACD = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ 。

2. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线。

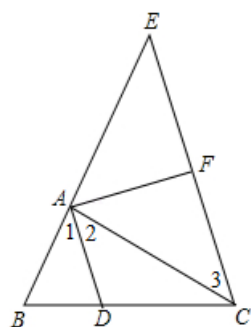
- (1) 如图 1，过 C 作 $CE \parallel AD$ 交 BA 延长线于点 E ，若 F 为 CE 的中点，连接 AF ，
求证： $AF \perp AD$ ；

(2) 如图 2, M 为 BC 的中点, 过 M 作 $MN \parallel AD$ 交 AC 于点 N , 交 BA 的延长线于 E , 若 $AB=8$, $AC=14$, 求 NC 的长.



【答案】(1) 略; (2) 11。

【分析】(1)



证明: $\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\because CE \parallel AD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle E, \quad \angle 2 = \angle 3.$$

$$\therefore \angle E = \angle 3.$$

$$\therefore AC = AE.$$

$\because F$ 为 EC 的中点,

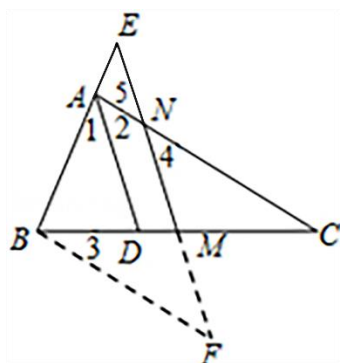
$$\therefore AF \perp EC,$$

$$\because AD \parallel EC,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle FAD = 90^\circ.$$

$$\therefore AF \perp AD.$$

(2)



过 B 作 $BF \parallel AC$ 交 NM 延长线于点 F ,

$$\therefore \angle 3 = \angle C, \quad \angle F = \angle 4$$

$\because M$ 为 BC 的中点

$$\therefore BM = CM .$$

在 $\triangle BFM$ 和 $\triangle CNM$ 中,

$$\begin{cases} \angle F = \angle 4 \\ \angle 3 = \angle C \\ BM = CM \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle BFM \cong \triangle CNM (AAS) ,$$

$$\therefore BF = CN ,$$

$$\therefore MN \parallel AD ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle E, \quad \angle 2 = \angle 4 = \angle 5 .$$

$$\therefore \angle E = \angle 5 = \angle F .$$

$$\therefore AE = AN, \quad BE = BF .$$

设 $CN = x$, 则 $BF = x$, $AE = AN = AC - CN = 14 - x$, $BE = AB + AE = 8 + 14 - x$.

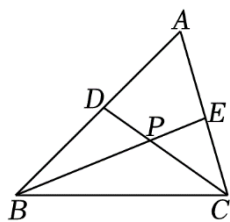
$$\therefore 8 + 14 - x = x .$$

解得 $x = 11$.

$$\therefore CN = 11 .$$

3. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, BE , CD 分别平分 $\angle ABC$, $\angle ACB$, P 为 BE , CD 的交点, 则以下结论中: (1) $\angle BPC = 120^\circ$, (2) $BD + CE = BC$, (3)

$S_{\triangle PBD} + S_{\triangle PCE} = S_{\triangle PBC}$, (4) 连接 AP , AP 平分 $\angle BAC$, 正确的个数是()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 D

【分析】 $\because BE$ 、 CD 分别是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的角平分线， $\angle BAC = 60^\circ$ ，

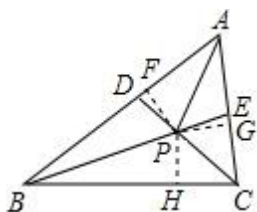
$$\therefore \angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ,$$

$\therefore \angle BPC = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，故 (1) 正确；

$\therefore \angle BPC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle DPE = 120^\circ$ ，

如图，过点 P 作 $PF \perp AB$ ， $PG \perp AC$ ， $PH \perp BC$ ，



$\because BE$ 、 CD 分别是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的角平分线，

$\therefore AP$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，故 (4) 正确；

$\because \angle BAC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AFP = \angle AGP = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle FPG = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle DPF = \angle EPG$ ，

在 $\triangle PFD$ 与 $\triangle PGE$ 中，

$$\begin{cases} \angle DFP = \angle EGP \\ PF = PG \\ \angle DPF = \angle EPG \end{cases},$$

$\therefore \triangle PFD \cong \triangle PGE (ASA)$ ，

$\therefore PD = PE$ ，

$\therefore PF = PG = PH$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BHP$ 与 $\text{Rt}\triangle BFP$ 中，

$$\begin{cases} BP = BP \\ PF = PH \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BHP \cong \text{Rt}\triangle BFP(\text{HL})$ ，

同理， $\text{Rt}\triangle CHP \cong \text{Rt}\triangle CGP$ ，

$$\therefore BH = BD + DF, \quad CH = CE - GE,$$

两式相加得， $BH + CH = BD + DF + CE - GE$ ，

$$\therefore DF = EG,$$

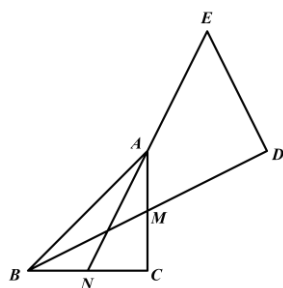
$$\therefore BC = BD + CE, \quad \text{故 (2) 正确;}$$

$$\therefore S_{\triangle PBD} + S_{\triangle PCE} = S_{\triangle PBC}, \quad \text{故 (3) 正确;}$$

$\therefore$ 正确的个数有 4 个，

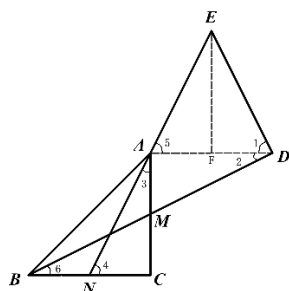
故选：D。

4. 如图， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle C$ 是直角。点 M, N 分别是边 AC, BC 的中点，点 D 在射线 BM 上，且 $BD = 2BM$ 。点 E 在射线 NA 上，且 $NE = 2NA$ 。求证： $BD \perp DE$ 。



【答案】略。

【分析】



如图，连结 AD ，取 AD 的中点 F ，连结 EF 。由 $AC = BC$ ， $CN = CM$ ，可知

$Rt\triangle ACN \cong Rt\triangle BCM$ ，则 $\angle NAC = \angle MBC$ ，即 $\angle 3 = \angle 6$ 。

由 $BM = DM$ ， $CM = AM$ ， $\angle BMC = \angle AMD$ ，可知 $\triangle BCM \cong \triangle DAM$ ，则 $AD = BC$ ，且 $\angle ADM = \angle MBC$ ，即 $\angle 2 = \angle 6$ 。故 $\angle ADM = \angle CAN$ ，且 $AD \parallel BC$ ，即 $\angle 2 = \angle 3$ 且 $\angle 4 = \angle 5$ 。

又由 $AE = AN$ ， $\angle ANC = \angle EAF$ ， $AF = NC$ ，可知 $\triangle AEF \cong \triangle NAC$ ，则 $\angle EFA = \angle C = 90^\circ$ 。

因 $AF = FD$ ，易证 $\triangle AEF \cong \triangle DEF$ ，则 $\angle EDF = \angle EAF = \angle ANC$ ，而 $\angle NAC + \angle ANC = 90^\circ$ ，故 $\angle EDF + \angle ADM = 90^\circ$ ，即 $BD \perp DE$ 。