

L7 拓展篇第一讲一绝对值

1. 试讨论 $|a|+a$ 的值的情况.
2. 若 a, b, c 均为整数且满足方程 $(a-b)^8 + (a-c)^8 = 1$, 则 $|a-b|+|a-c|+|b-c| = (\quad)$
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 方程 $||2x+1| - 3| = 5$ 的解是多少? 【请用绝对值的几何意义来解决这个问题】

4. 如图, 数轴上有点 a, b, c 三点.

(1) $c - b$ _____ 0; $a + c$ _____ 0 (填 “<”, “>”, “=”);

(2) 求 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的值.

(3) 化简 $|c - b| - |c| + |a - 1| - b$.



5. 分类讨论是一种重要的数学方法，如在化简 $|a|$ 时，可以这样分类：当 $a > 0$ 时， $|a| = a$ ；当 $a = 0$ 时， $|a| = 0$ ；当 $a < 0$ 时， $|a| = -a$ ．用这种方法解决下列问题：

- (1) 当 $a = 5$ 时，求 $\frac{a}{|a|}$ 的值．
- (2) 当 $a = -2$ 时，求 $\frac{a}{|a|}$ 的值．
- (3) 若有理数 a 不等于零，求 $\frac{a}{|a|}$ 的值．
- (4) 若有理数 a 、 b 均不等于零，试求 $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b}$ 的值．

6. 如图，数轴上有点 a ， b ， c 三点



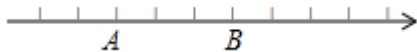
- (1) 用 “ $<$ ” 将 a ， b ， c 连接起来．
- (2) $b - a$ _____ 1 (填 “ $<$ ” “ $>$ ”，“ $=$ ”)
- (3) 化简 $|c - b| - |c - a + 1| + |a - 1|$
- (4) 用含 a ， b 的式子表示下列的最小值：
 - ① $|x - a| + |x - b|$ 的最小值为 _____；
 - ② $|x - a| + |x - b| + |x + 1|$ 的最小值为 _____；
 - ③ $|x - a| + |x - b| + |x - c|$ 的最小值为 _____．

7. 化简并填空:

(1) 当 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 时, 化简 $|3x+1| - 2|x-1|$;

(2) 当 $|x|+|x+4|$ 最小时, $|3x+1| - 2|x-1|$ 的最大值为_____.

8. 数轴上两点间的距离等于这两点所对应的数的差的绝对值. 例: 如图所示, 点 A 、 B 在数轴上分别对应的数为 a 、 b , 则 A 、 B 两点间的距离表示为 $|AB| = |a - b|$.



根据以上知识解题:

(1) 若数轴上两点 A 、 B 表示的数为 x 、 -1 ,

① A 、 B 之间的距离可用含 x 的式子表示为 _____;

② 若该两点之间的距离为 2, 那么 x 值为 _____.

(2) $|x+1|+|x-2|$ 的最小值为 _____, 此时 x 的取值是 _____;

(3) 已知 $(|x+1|+|x-2|)(|y-3|+|y+2|) = 15$, 求 $x-2y$ 的最大值 _____ 和最小值 _____.

L7 拓展篇第二讲—有理数运算

1. 计算题.

$$(1) \frac{5+6}{5 \times 6} - \frac{6+7}{6 \times 7} + \frac{7+8}{7 \times 8} - \frac{8+9}{8 \times 9} + \frac{9+10}{9 \times 10} - \frac{10+11}{10 \times 11};$$

$$(2) 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{12} + 7\frac{1}{20} + 9\frac{1}{30} + 11\frac{1}{42} + 13\frac{1}{56} + 15\frac{1}{72} + 17\frac{1}{90};$$

$$(3) \left(\frac{51}{15} + \frac{59}{37} + \frac{73}{95}\right) \times \left(\frac{59}{37} + \frac{73}{95} + \frac{15}{51}\right) - \left(\frac{51}{15} + \frac{59}{37} + \frac{73}{95} + \frac{15}{51}\right) \times \left(\frac{59}{37} + \frac{73}{95}\right);$$

$$(4) \left(\frac{202020}{131313} + \frac{200200}{130130} + \frac{20002000}{13001300}\right) \div \frac{20}{13} \times \frac{2020}{1313}.$$

2. 小明在计算有规律的算式 $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \cdots + 19 - 20$ 时, 不小心把一个运算符号写错了 (“+” 错写成 “-” 或 “-” 错写成 “+”), 结果算成了 -36 , 则原式从左到右数, 写错的运算符号是 ()

- A. 第 5 个 B. 第 8 个 C. 第 10 个 D. 第 12 个

3. 读一读:

式子 “ $1+2+3+4+\cdots+100$ ” 表示从 1 开始的 100 个连续自然数的和, 由于式子比较长, 书写不方便, 为了简便起见, 我们将其表示为 $\sum_{n=1}^{100} n$. 这里 “ Σ ” 是求和符号.

通过以上材料的阅读, 解决问题:

(1) 用求和符号表示式子 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \cdots + 99 \times 100 + 100 \times 101$;

(2) 计算 $\sum_{n=1}^{2012} \frac{1}{n(n+1)}$.

4. 计算 $\frac{94 \times 99 + 95 \times 98 + 96 \times 97 + 97 \times 96}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \times 99$ 的整数部分为 ()

A. 96

B. 97

C. 98

D. 99

5. 证明: $\frac{2}{11} < \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{120} < \frac{1}{5}$.

L7 拓展篇第三讲——一元一次方程

1. 已知 x, y 为有理数, 定义一种新的运算 $\triangle$: $x \triangle y = 2xy - x + 1$, 若关于 x 的方程 $x \triangle a = 19$ 有正整数解, 且 a 为正整数. 求符合条件的所有的 a 的值的积.
2. 已知 k 为非负整数, 且关于 x 的方程 $2(x - 2) = \frac{kx}{3} + 4$ 的解为正整数, 求 k 所有可能取值的和.
3. 已知关于 x 的方程 $2ax = (a + 1)x + 3$, 若方程无解, 则整数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$; 若方程的解为正整数, 则整数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.
4. 如果关于 x 的方程 $(m + 2)x = 8$ 无解, 那么 m 的取值范围是 ()
A. $m > -2$ B. $m = -2$ C. $m \neq -2$ D. 任意实数
5. 关于 x 的方程 $2a(x - 1) = (5 - a)x + 3b$ 有无穷多个解, 求 $a - b$.

6. 如果 a, b 为定值, 关于 x 的一次方程 $\frac{kx+2a}{2} - \frac{x-bk}{6} = \frac{1}{2}$, 无论 k 为何值时, 1 总是它的解, 求 $6a+b$.

7. 解下列关于 x 的方程.

(1) $4x + b = ax - 8$, ($a \neq 4$);

(2) $mx - 1 = nx$;

(3) $\frac{1}{3}m(x - n) = \frac{1}{4}(x + 2m)$.

8. 不论 x 取何值，等式 $2ax + b = 4x - 3$ 总成立，求 $a + b$ 的值.

L7 拓展篇第四讲—绝对值方程

1. 方程 $||2x + 1| - 3| = 5$ 的解是多少?

2. $|||x - 1| - 1| - 1| = 0$ 是一个含有 4 重绝对值符号的方程, 则 ()

A. 0, 2, 4 全是根

B. 0, 2, 4 全不是根

C. 0, 2, 4 不全是根

D. 0, 2, 4 之外没有根

3. 解方程

(1) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 6;$

(2) $|x + 3| + |x - 3| = \frac{9}{2}|x| + 5.$

4. 已知关于 x 的绝对值方程 $2||x - 1| - 2| = a$ 有三个不相等的解, 求 a 的值.

5. 若 x_0 是关于 x 的一元一次方程 $x - \frac{x-2a}{4} = 2a + 3$ 的解, y_0 是关于 y 的方程 $|y + 1| - 3 = 14$ 的一个解, 且 x_0 、 y_0 满足 $x_0 + y_0 = 424$, 求 a 的值.

6. 若 $-199 < x < 199$, 则满足 x 的方程 $||x| - 100| = m$ 的整数 m 的值共有 ()

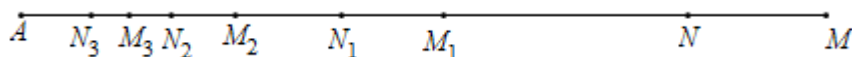
A. 100 个 B. 102 个 C. 101 个 D. 103 个

7. (1) 解方程 $\frac{x}{2} + |x - 1| = 5$;

(2) 关于 x 的方程 $|x + 3| - 1 = -2m + 3$ 只有 1 个解, 求方程的解及 m 的值.

L7 拓展篇第五讲一线与角

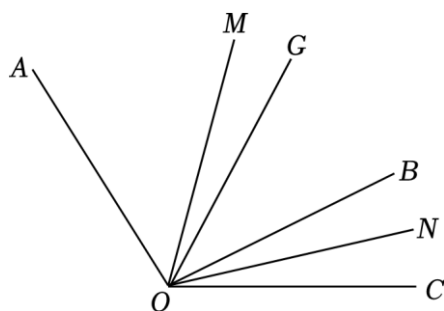
1. 如图，点 M 在线段 AN 的延长线上，且线段 $MN=20$ ，第一次操作：分别取线段 AM 和 AN 的中点 M_1, N_1 ；第二次操作：分别取线段 AM_1 和 AN_1 的中点 M_2, N_2 ；第三次操作：分别取线段 AM_2 和 AN_2 的中点 M_3, N_3 ；……连续这样操作 10 次，则每次的两个中点所形成的所有线段之和 $M_1N_1+M_2N_2+\cdots+M_{10}N_{10}=(\quad)$



- A. $20 - \frac{10}{2^9}$ B. $20 + \frac{10}{2^9}$ C. $20 - \frac{10}{2^{10}}$ D. $20 + \frac{10}{2^{10}}$

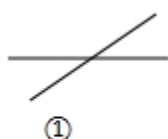
2. 如图，射线 OG 是 $\angle AOC$ 的角平分线，射线 OM 是 $\angle AOB$ 的角平分线，射线 ON 是 $\angle BOC$ 的角平分线，则下列结论成立的有 $(\quad)$ 个.

- ① $\angle MON = \angle COG$;
 ② $\angle MOG = \frac{1}{2} (\angle AOG - \angle BOG)$;
 ③ $\angle GON = \frac{1}{2} (\angle COG + \angle BOG)$;
 ④ $\angle MON = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOG)$;

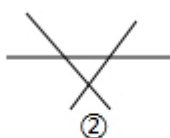


- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

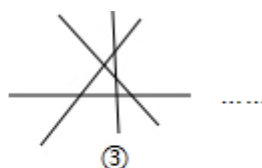
3. 观察如图，并阅读图形下面的相关文字：



两条直线相交，
最多有1个交点



三条直线相交，
最多有3个交点



四条直线相交
最多有6个交点

像这样，20 条直线相交，交点最多的个数是（ ）

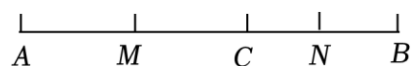
- A. 100 个 B. 135 个 C. 190 个 D. 200 个

4. 如图，点 C 在线段 AB 上，点 M 、 N 分别是 AC 、 BC 的中点.

(1) 若 $AC=10\text{cm}$ ， $CB=8\text{cm}$ ，求线段 MN 的长；

(2) 若 C 为线段 AB 上任一点，满足 $AC+CB=a$ ，其它条件不变，你能猜想 MN 的长度吗？写出你的结论并说明理由；

(3) 若 C 为直线 AB 上线段 AB 之外的任一点，且 $AC=m$ ， $CB=n$ ，则线段 MN 的长为 _____.



5. 如图，已知数轴上，点 O 为原点，点 A 对应的数为 9，点 B 对应的数为 b ，点 C 在点 B 右侧，长度为 2 个单位的线段 BC 在数轴上移动.



- (1) 当 $b=5$ 时，试求线段 AC 的长；
- (2) 当线段 BC 在数轴上沿射线 AO 方向移动的过程中，若存在 $AC - OB = \frac{1}{2}AB$ ，求此时满足条件的 b 值.
- (3) 当线段 BC 在数轴上移动时，满足关系式 $|AC - OB| = |AB - OC|$ ，则此时的 b 的取值范围是 _____.

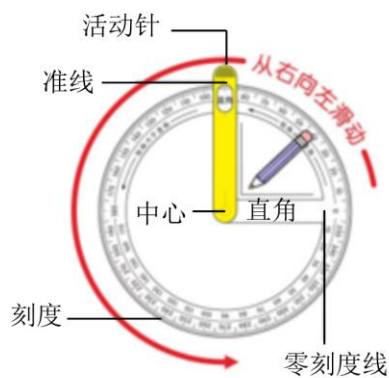
6. 学习了角的度量单位后，好学的小明在网上搜索发现了如图①所示的量角演示器，他将一副三角尺和量角演示器按如图②所示位置摆放，请你和小明一起探索以下问题：

(1) 当活动针 OE 对应的读数为 140 时， $\angle EOD = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ；当活动针 OE 平分 $\angle BOD$ 时， OE 对应的读数为 $\underline{\hspace{1cm}}^\circ$ 。

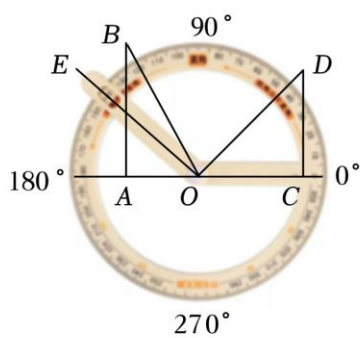
(2) 将三角尺 AOB 绕着点 O 以每秒 4° 的速度按顺时针方向旋转，同时，三角尺 COD 绕着点 O 以每秒 2° 的速度按顺时针方向旋转，当三角尺 AOB 旋转一周时，两把三角尺同时停止转动。

①若在旋转过程中，活动针 OE 始终平分 $\angle BOD$ 。当 $\angle BOD = 60^\circ$ 时，求旋转所用的时间和活动针 OE 对应的读数；

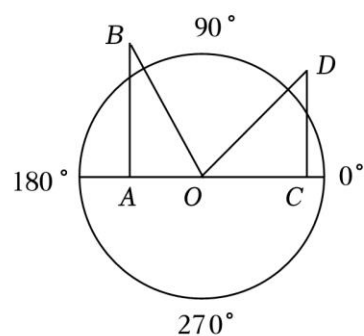
②若两把三角尺开始旋转时，活动针 OE 同时从 OB 的位置绕着点 O 以每秒 7° 的速度按顺时针方向旋转，当 OE 与 OD 重合后，活动针 OE 立即以同样的速度逆时针方向旋转。当 OE 与 OB 重合后停止旋转，求活动针 OE 停止时对应的读数，请直接写出答案（结果保留整数）。



①

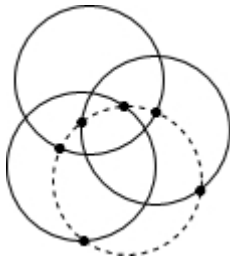


②



③

7. 平面上 5 个圆最多能把平面分成多少个部分？



L7 拓展篇第六讲—平行线

1. 平面上有 10 条直线，其中 4 条直线交于一点，另有 4 条直线互相平行，这 10 条直线最多有几个交点？

2. (1) 平面上有 6 条直线，共有 12 个不同的交点，画出它们可能的位置关系（画三种图形）.
(2) 平面上 n 条直线中每条恰与另外的 1999 条相交，求 n 的所有可能值.
(3) ①已知平面内有 4 条直线 a, b, c 和 d ，直线 a, b 和 c 相交于一点，直线 b, c 和 d 也相交于一点. 试确定这 4 条直线共有多少个交点？并说明你的理由.
②作第 5 条直线 e 与①中的直线 d 平行，说明：以这 5 条直线的交点为端点的线段有多少条？

3. ①如下图 1，已知 $AB \parallel CD$ ， AB 和 CD 都不经过点 E ，探索 $\angle E$ 与 $\angle A$ ， $\angle C$ 的数量关系.

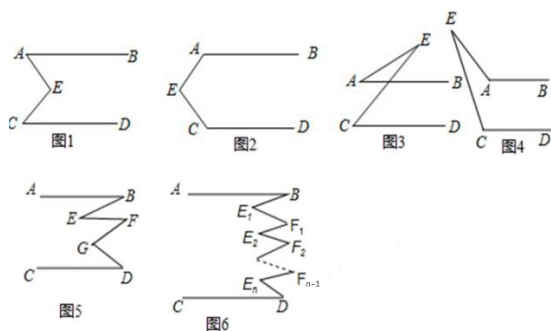
②在图 2 中，若 $\angle A = 110^\circ$ ， $\angle C = 130^\circ$ ，则 $\angle E$ 的度数为_____；

在图 3 中，若 $\angle A = 20^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$ ，则 $\angle E$ 的度数为_____.

③图 4 中，探索 $\angle E$ 与 $\angle A$ ， $\angle C$ 的数量关系，并说明理由.

④（1）如图 5， $\angle B$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 之间有什么关系？（直接写出结论）

（2）如图 6，你可以得到什么结论？（直接写出结论）



4. (1) 如图 1, AC 平分 $\angle DAB$, $\angle 1 = \angle 2$, 试说明 AB 与 CD 的位置关系, 并予以证明;

(2) 如图 2, 在 (1) 的条件下, AB 的下方两点 E, F 满足 $\angle EBF = 2\angle ABF$, CF 平分 $\angle DCE$, 若 $\angle F$ 的 2 倍与 $\angle E$ 的补角的和为 190° , 求 $\angle ABE$ 的度数;

(3) 如图 3, 在前面的条件下, 若 P 是 BE 上一点, G 是 CD 上任一点, PQ 平分 $\angle BPG$, $PQ \parallel GN$, GM 平分 $\angle DGP$, 下列结论: ① $\angle DGP - \angle MGN$ 的值不变; ② $\angle MGN$ 的度数不变. 可以证明, 只有一个是正确的, 请你作出正确的选择并求值.

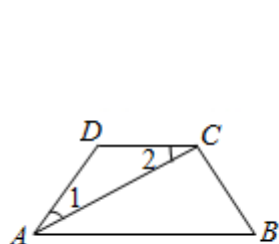


图1

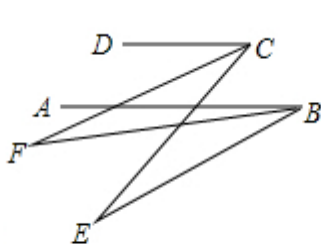


图2

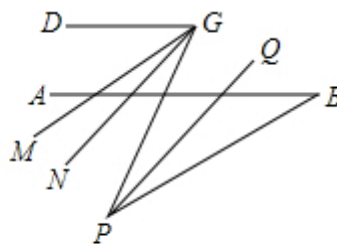


图3

5. (1) 光线从空气中射入水中会产生折射现象，同时光线从水中射入空气中也会产生折射现象，如图 1，光线 a 从空气中射入水中，再从水中射入空气中，形成光线 b ，根据光学知识有 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，请判断光线 a 与光线 b 是否平行，并说明理由；

(2) 如图 2，直线 EF 上有两点 A 、 C ，分别引两条射线 AB 、 CD 。已知 $\angle BAF = 150^\circ$ ， $\angle DCF = 80^\circ$ ，射线 AB 、 CD 分别绕点 A 、点 C 以 1 度/秒和 3 度/秒的速度同时顺时针转动，设时间为 t 秒，当射线 CD 转动一周时，两条射线同时停止。则当直线 CD 与直线 AB 互相垂直时， $t =$ _____ 秒。

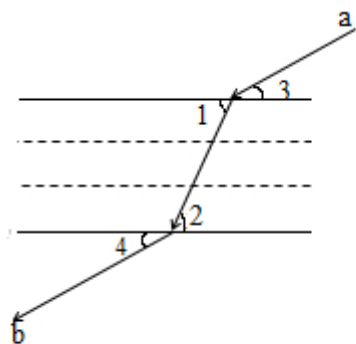


图1

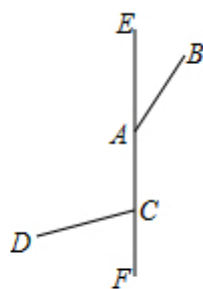


图2

L7 拓展篇第七讲—实数

1. 已知 $\sqrt{a-1}+(ab-2)^2=0$, 则 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\dots+\frac{1}{(a+2008)(b+2008)}$ 的值为_____.

2. 请证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数.

3. 已知: m, n 是两个连续自然数 ($m < n$), 且 $q = mn$. 设 $p = \sqrt{q+n} + \sqrt{q-m}$, 则 p (_____).

A、总是奇数; B、总是偶数; C、有时是奇数, 有时是偶数; D、有时是有理数, 有时是无理数.

请选出答案, 并给出证明过程.

4. 设 a 为有理数, x 为无理数, 证明: (1) $a+x$ 是无理数; (2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 是无理数.

5. 斐波那契 (约 1170–1250, 意大利数学家) 数列是按某种规律排列的一系列数,

他发现该数列中的每个正整数都可以用无理数的形式表示，如第 n (n 为正整

数) 个数 a_n 可表示为 $\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$.

- (1) 计算第一个数 a_1 ;
- (2) 计算第二个数 a_2 ;
- (3) 证明连续三个数之间 a_{n-1} , a_n , a_{n+1} 存在以下关系: $a_{n+1} - a_n = a_{n-1} (n \geq 2)$;
- (4) 写出斐波那契数列中的前 8 个数.

6. 求满足条件 $\sqrt{a-2\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ 的正整数 a 、 x 、 y .

7. 已知在等式 $\frac{ax+b}{cx+d} = S$ 中, a 、 b 、 c 、 d 都是有理数, x 是无理数, 问:

- (1) 当 a 、 b 、 c 、 d 满足什么条件时， S 是有理数；
- (2) 当 a 、 b 、 c 、 d 满足什么条件时， S 是无理数.

L7 拓展篇第八讲—方程组（一）

1. 解方程组
$$\begin{cases} x - y - z = 5, \textcircled{1} \\ y - x - z = 1, \textcircled{2} \\ z - x - y = -15. \textcircled{3} \end{cases}$$

2. 解方程组
$$\begin{cases} x - y + z = 1, \textcircled{1} \\ y - z + u = 2, \textcircled{2} \\ z - u + v = 3, \textcircled{3} \\ u - v + x = 4, \textcircled{4} \\ v - x + y = 5. \textcircled{5} \end{cases}$$

3. 已知
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0, \textcircled{1} \\ \frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z} = 0. \textcircled{2} \end{cases}$$

求 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ 的值.

4. 解方程组
$$\begin{cases} 5x - y + 3z = a, & \textcircled{1} \\ 5y - z + 3x = b, & \textcircled{2} \\ 5z - x + 3y = c. & \textcircled{3} \end{cases}$$

5. 已知方程组 $\begin{cases} 4x - 3y = k \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ 的解中 x 的绝对值与 y 的绝对值相等, 则 k 的值为_____.

6. 解方程组 $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ |x + y| = 7 \end{cases}$.

L7 拓展篇第九讲—方程组（二）

1. 已知 $\frac{ab}{a+b}=2$, $\frac{ac}{a+c}=5$, $\frac{bc}{b+c}=4$, 求 $a+b+c$ 的值.

2. 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} ax+2y=1+a, & \textcircled{1} \\ 2x+2(a-1)y=3. & \textcircled{2} \end{cases}$ 分别求出当 a 为何值时, 方程组有唯一一组解; 无解; 有无穷多组解.

3. 若方程组 $\begin{cases} 3x+4y=m-4, \\ x-2y=3m+2\frac{1}{2} \end{cases}$ 的解满足 $x+y=0$, 求 m 的值.

4. 已知关于 x 和 y 的方程组
$$\begin{cases} 3x + 4y = -5, \\ 5x + 6y = -9, \\ (n - 8m)x - 8y = 10, \\ 5x + (10m + 2n)y = -9 \end{cases}$$
 有解, 求 $m^2 + n^2$ 的值.

5. 已知 $xyz \neq 0$, 且 $x + 2y + z = 0$, $5x + 4y - 4z = 0$, 求 $\frac{x^2 + 6y^2 - 10z^2}{3x^2 - 4yz + 5z^2}$ 的值.

6. 如果方程组
$$\begin{cases} x + y = m, \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$$
 的解是正整数, 求整数 m 的值.

L7 拓展篇第十讲一不等式

1. 已知 $2(x-2)-3(4x-1)=9(1-x)$ ，且 $y < x+9$ ，试比较 $\frac{1}{\pi}y$ 与 $\frac{10}{31}y$ 的大小.
2. 解关于 x 的不等式 $\frac{3x+3}{a^2}-2 > \frac{1-2x}{a}$.
3. 如果关于 x 的不等式 $(2a-b)x+a-5b > 0$ 的解集为 $x < \frac{10}{7}$ ，求关于 x 的不等式 $ax > b$ 的解集.

4. 求同时满足 $a+b+c=6$, $2a-b+c=3$ 和 $b \geq c \geq 0$ 的 a 的最大值及最小值.

5. 解不等式 $|x-5|-|2x-3|<1$.

6. a 取何值时, 不等式 $|2x+5|+|4-2x|<a$ 无实数解?

7. 若不等式 $|x+1|+|x-3|\leq a$ 有解, 求 a 的取值范围.