



2.1.2.8 【数学思维】极化恒等式

难度 ★★★

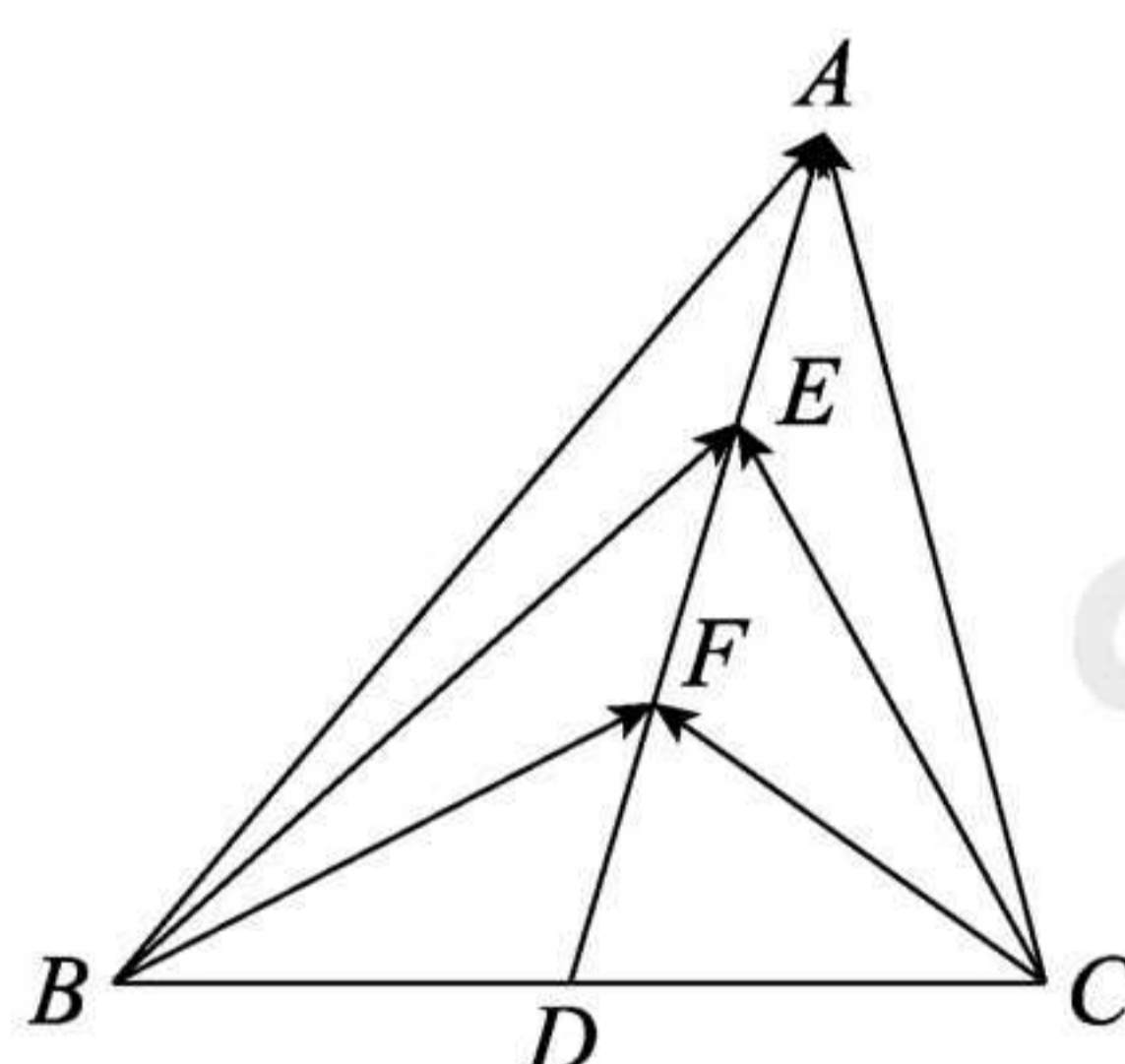
提高专属

【例 1】 难度 ★☆☆

(2012 浙江卷高考真题第 15 题) 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 3$, $BC = 10$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.

【例 2】 难度 ★☆☆

(2016 · 江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是 _____.



【例 3】 难度 ★☆☆

(2022 · 上海) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, 点 M 为边 AB 的中点, 点 P 在边 BC 上, 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最小值为 _____.

4 ☆☆☆

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $CA = CB = 3$, M, N 是斜边 AB 上的两个动点, 且 $MN = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的取值范围为 ()

- A. $[2, \frac{5}{2}]$ B. $[2, 4]$ C. $[3, 6]$ D. $[4, 6]$

【例 5】 难度 ☆☆☆

(2017 新课标 II 高考真题第 12 题) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ()

- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1



2.1.2.8 【数学思维】极化恒等式

难度 ★★★

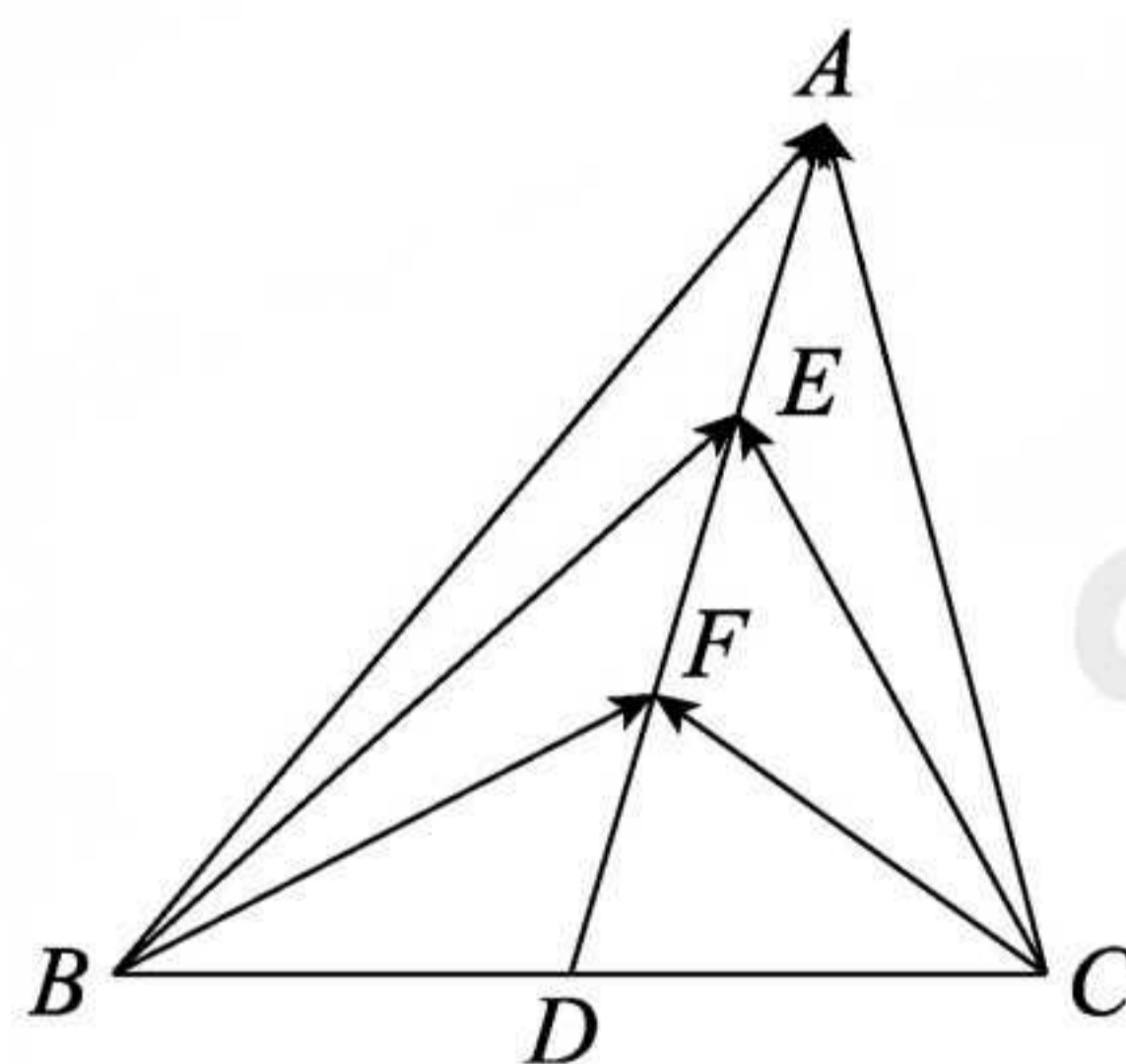
目标专属

【例 1】 难度 ★☆☆

(2012 浙江卷高考真题第 15 题) 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 3$, $BC = 10$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.

【例 2】 难度 ★☆☆

(2016 · 江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是 _____.



【例 3】 难度 ★☆☆

(2022 · 上海) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, 点 M 为边 AB 的中点, 点 P 在边 BC 上, 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最小值为 _____.

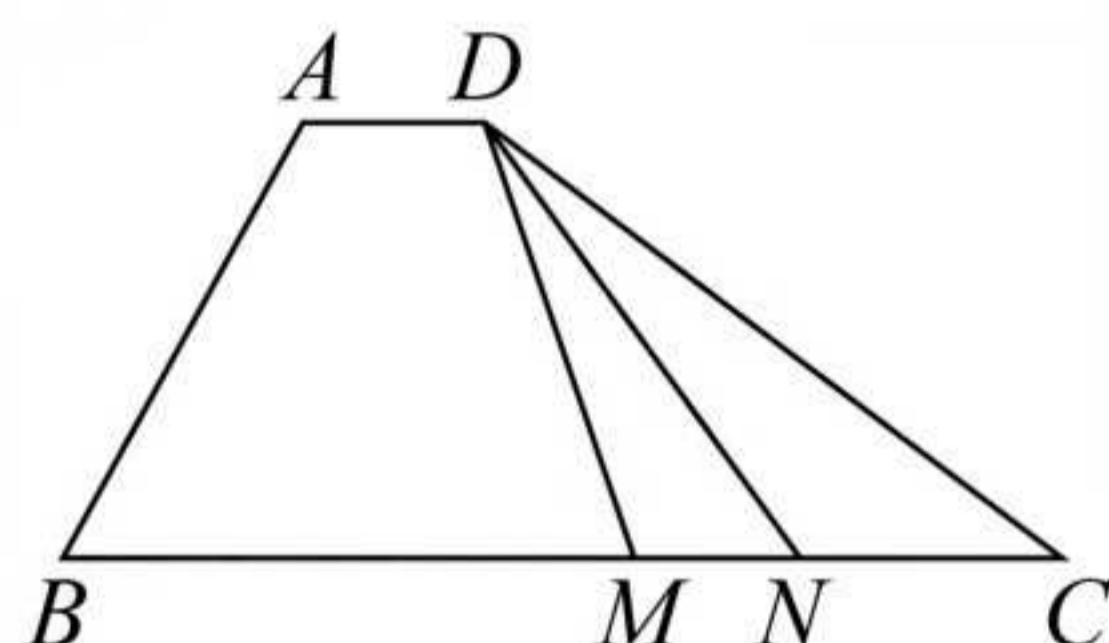
4 ☆☆☆

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $CA = CB = 3$, M, N 是斜边 AB 上的两个动点, 且 $MN = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的取值范围为 ()

- A. $[2, \frac{5}{2}]$ B. $[2, 4]$ C. $[3, 6]$ D. $[4, 6]$

【例5】 难度 ★★★

(2020 天津高考真题第 15 题) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 3$, $BC = 6$, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$, 则实数 λ 的值为 _____, 若 M, N 是线段 BC 上的动点, 且 $|\overrightarrow{MN}| = 1$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为 _____.



【例6】 难度 ★★★

(2022 · 北京卷高考真题压轴第 10 题) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ()

A. $[-5, 3]$ B. $[-3, 5]$ C. $[-6, 4]$ D. $[-4, 6]$



2.1.2.8 【数学思维】极化恒等式

难度 ★★★

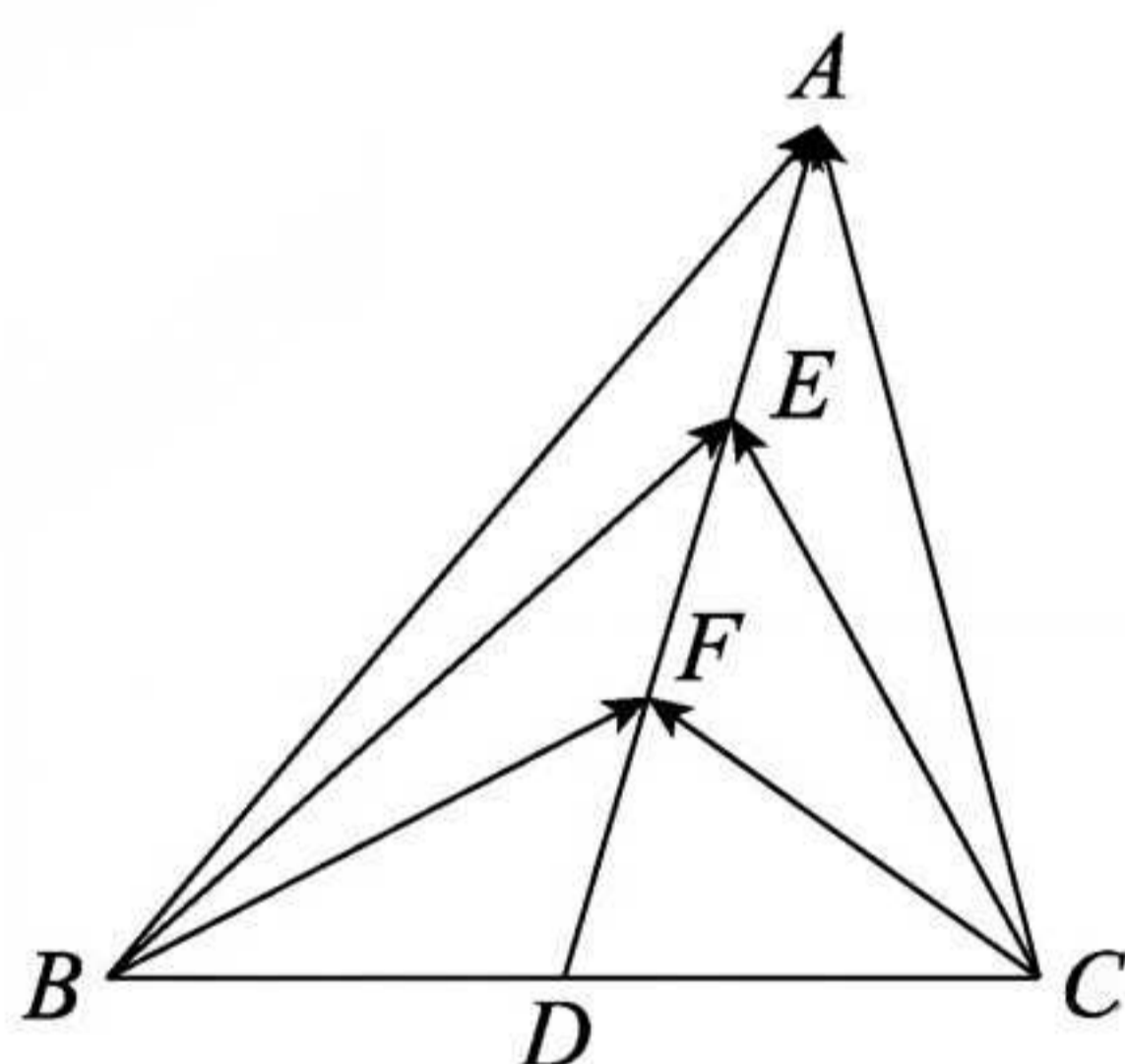
菁英专属

【例 1】 难度 ★☆☆

(2012 浙江卷高考真题第 15 题) 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 3$, $BC = 10$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.

【例 2】 难度 ★★★

(2016 · 江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是 _____.



【例 3】 难度 ★★★

(2022 · 上海) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, 点 M 为边 AB 的中点, 点 P 在边 BC 上, 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最小值为 _____.

【例 4】 难度 ★★★

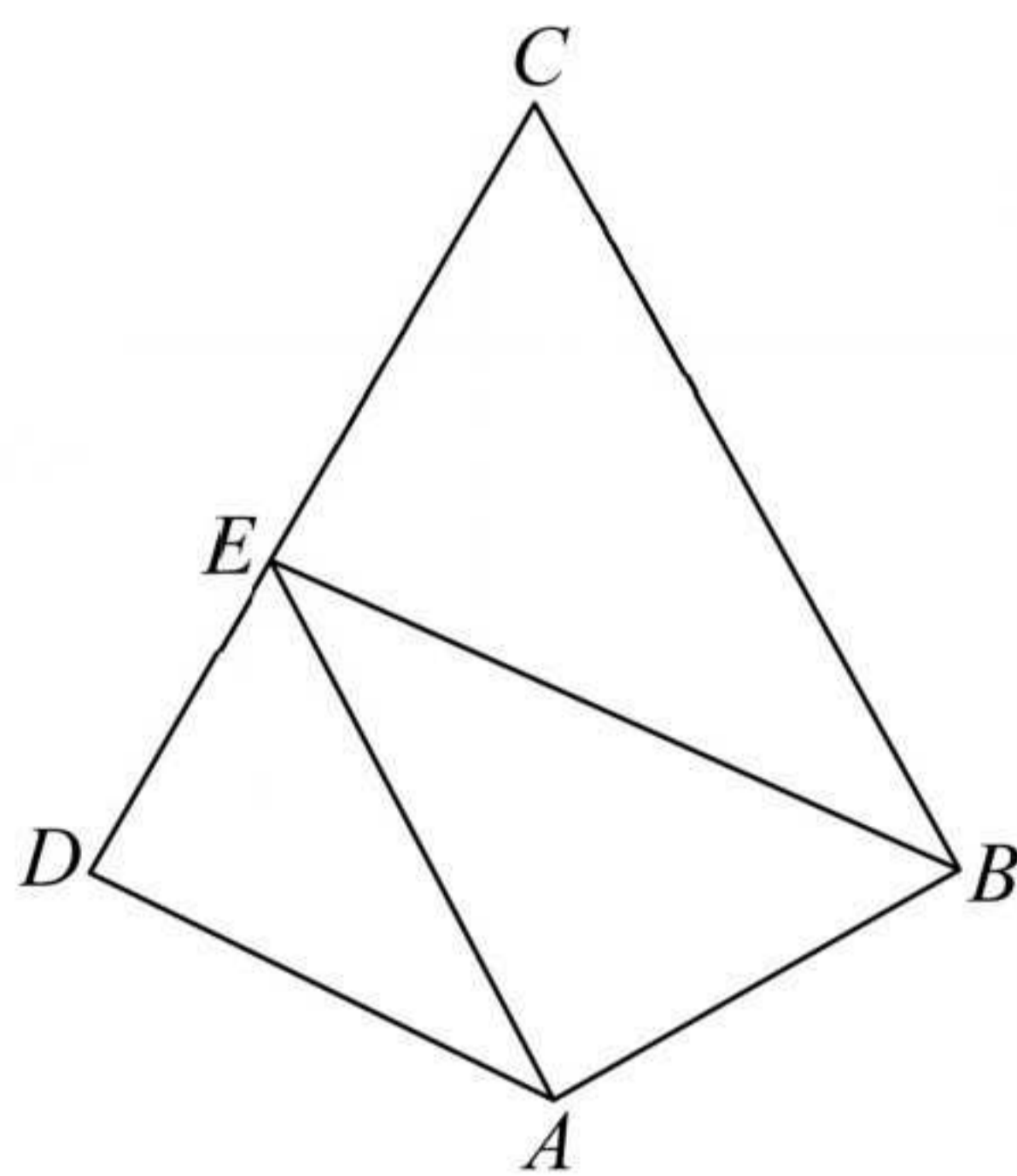
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $CA = CB = 3$, M, N 是斜边 AB 上的两个动点, 且 $MN = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN}$ 的取值范围为 ()

A. $[2, \frac{5}{2}]$ B. $[2, 4]$ C. $[3, 6]$ D. $[4, 6]$

5

☆☆☆

(2018 天津卷高考真题第 8 题) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = AD = 1$. 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ()



A. $\frac{21}{16}$

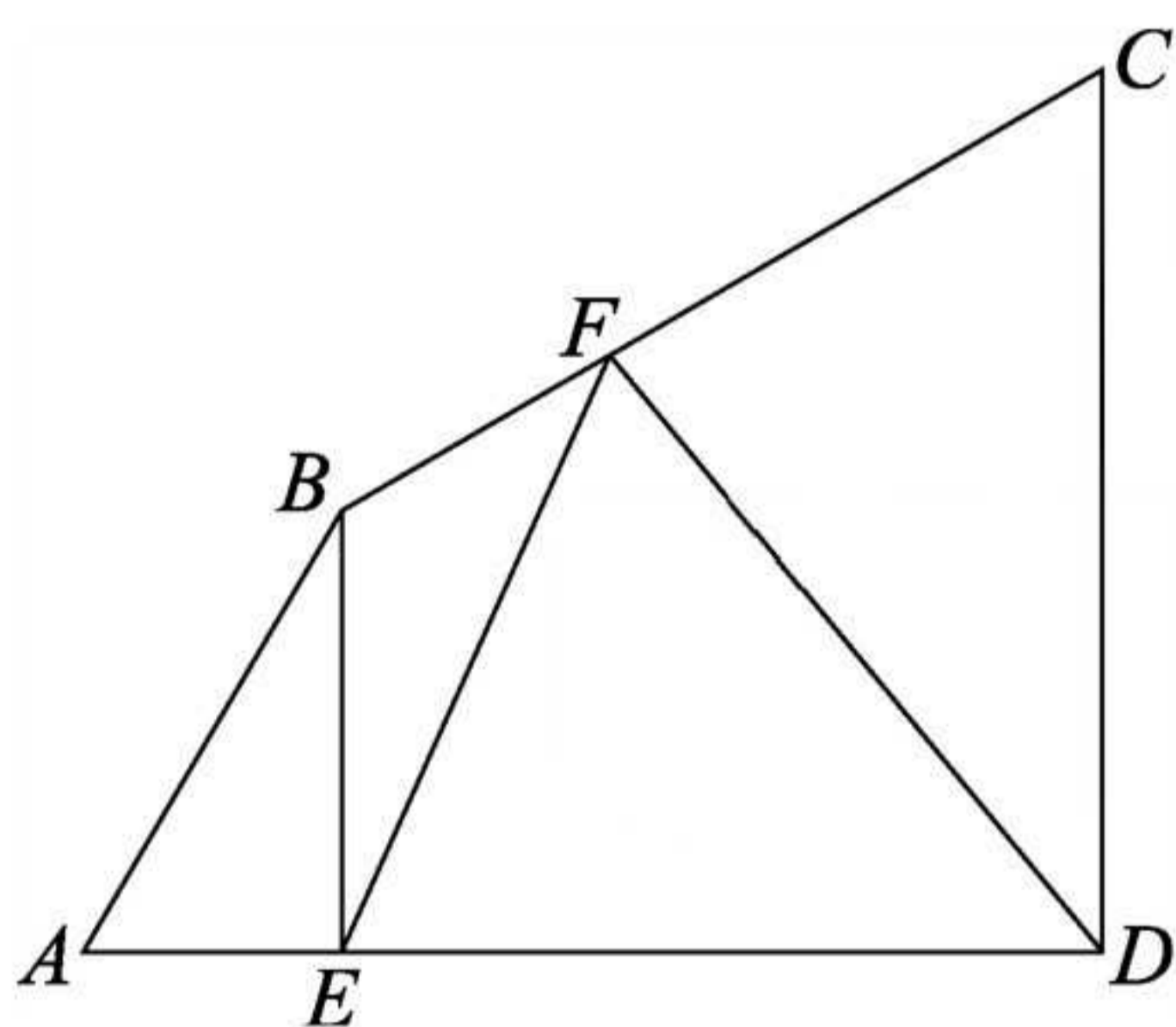
B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{25}{16}$

D. 3

【例 6】 难度 ★★★★★

如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \perp CD$, $\angle BAD = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$, $AB = 8$, $AD = 16$, 点 E 在边 AD 上, 且 $BE \perp AD$, 点 F 为边 BC (含端点) 上一动点, 则 $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF}$ 的最小值为 ()



A. 36

B. 39

C. 45

D. 48