

习题 L8-20：因式分解

参考答案与试题解析

1. 下列各式从左到右的变形属于因式分解的是()

A. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

B. $a^2 - 2a + 3 = a(a-2) + 3$

C. $a^2 - 1 = a(a - \frac{1}{a})$

D. $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

【答案】D

2. 把下列各式分解因式：

(1) $4xyz - 4x^2yz - 12xy^2z$ ；

(2) $20a^{m+1}b^{2m+4} - 12a^{2m+1}b^{m+2}$ ；

(3) $-20c(a-b)^2 - 25(b-a)^3$ ；

(4) $x(x-2) - x + 2$.

【答案】(1) $4xyz(1-x-3y)$ ；

(2) $4a^{m+1}b^{m+2}(5b^{m+2} - 3a^m)$ ；

(3) $-5(b-a)^2(4c+5b-5a)$ ；

(4) $(x-2)(x-1)$.

3. 分解因式：

(1) $6x^2 - 4xy$ ；

(2) $15x^2y(3-m)^3 + 5xy(m-3)^2$.

【答案】(1) $2x(3x-2y)$ ；

(2) $5xy(3-m)^2(9x-3xm+1)$.

4. 分解下列因式：

(1) $4x^2yz - 12xy^2z + 18xyz^2$ ；

(2) $2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$ ；

$$(3) (2x-3y)(3x-2y) + (2y-3x)(2x+3y);$$

$$(4) -\frac{2}{3}ax^2 + \frac{1}{4}ax - 6a;$$

$$(5) \frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1} (n \text{ 是正整数});$$

$$(6) mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2).$$

【答案】 (1) $4x^2yz - 12xy^2z + 18xyz^2;$

$$= 2xyz(2x - 6y + 9z);$$

$$(2) 2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2;$$

$$= 2a^2b(x+y)(b+c)[(x+y) - 3ab^2(b+c)],$$

$$= 2a^2b(x+y)(b+c)(x+y - 3ab^3 - 3ab^2c);$$

$$(3) (2x-3y)(3x-2y) + (2y-3x)(2x+3y);$$

$$= (3x-2y)(2x-3y-2x-3y),$$

$$= -6y(3x-2y);$$

$$(4) -\frac{2}{3}ax^2 + \frac{1}{4}ax - 6a;$$

$$= -\frac{1}{12}a(8x^2 - 3x + 72);$$

$$(5) \frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1} (n \text{ 是正整数});$$

$$= \frac{1}{6}b^{2n-1}(9b^n + 1);$$

$$(6) mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2).$$

$$= n(m^2 + n^2)(m - n).$$

5. 把下列各式分解因式:

$$(1) \frac{n^2}{9} - \frac{2}{3}n + 1;$$

$$(2) \frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} - \frac{ab}{10};$$

$$(3) -x^2 - 4y^2 + 4xy;$$

$$(4) a^4b^4 + 4a^2b^2c + 4c^2;$$

$$(5) 20(x+y) + 25 + 4(x+y)^2;$$

$$(6) a^2 - 6a(c-b) + 9(b-c)^2.$$

【答案】 (1) $(\frac{n}{3}-1)^2$;

$$(2) (\frac{a}{5}-\frac{b}{4})^2;$$

$$(3) -(x-2y)^2;$$

$$(4) (a^2b^2 + 2c)^2;$$

$$(5) (2x+2y+5)^2;$$

$$(6) (a+3b-3c)^2.$$

6. 分解因式:

$$(1) x^4 - 16;$$

$$(2) (9a^2 + 1)^2 - 36a^2;$$

$$(3) (x^2 - 44)^2 + 10(44 - x^2) + 25;$$

$$(4) (2 - m^2n^2)(6 - m^2n^2) + 4.$$

【答案】 (1) $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$;

$$(2) (3a+1)^2(3a-1)^2;$$

$$(3) (x+7)^2(x-7)^2;$$

$$(4) (2+mn)^2(2-mn)^2.$$

7. 把下列各式分解因式:

$$(1) 4a^2 - 4a + 1;$$

$$(2) 25x^2 + 9 + 30x;$$

$$(3) -1 + xy - \frac{x^2y^2}{4};$$

$$(4) 4 + 12(y-x) + 9(x-y)^2;$$

$$(5) m^6 - 2m^3n^2 + n^4;$$

$$(6) (m+6n)^2 + 4m(m+6n) + 4m^2.$$

【答案】 (1) $(2a-1)^2$;

$$(2) (5x+3)^2;$$

$$(3) -(\frac{xy}{2}-1)^2;$$

$$(4) (2+3y-3x)^2;$$

$$(5) (m^3-n^2)^2;$$

$$(6) 9(m+2n)^2.$$

8. 分解因式

$$(1) 9a^2 - 6ab + 3a$$

$$(2) 121x^2 - 144y^2$$

$$(3) x(x-y) - y(y-x)^2$$

$$(4) 7a(x-y)^2 - 4b(y-x)^2$$

$$(5) \frac{1}{3} \times 65.9 - 44.9 \times \frac{1}{3} \text{ 能被 } 7 \text{ 整除吗?}$$

【答案】 (1) 原式 $= 3a(3a-2b+1)$;

$$(2) \text{原式} = (11x+12y)(11x-12y);$$

$$(3) \text{原式} = x(x-y) - y(x-y)^2 = (x-y)[x-y(x-y)] = (x-y)(x-xy+y^2);$$

$$(4) \text{原式} = 7a(x-y)^2 - 4b(x-y)^2 = (x-y)^2(7a-4b);$$

$$(5) \text{原式} = \frac{1}{3} \times (65.9 - 44.9) = \frac{1}{3} \times 21 = 7, \text{ 则原式能被 } 7 \text{ 整除}.$$

习题 L8-21：分式与分式运算（一）

参考答案与试题解析

1. 下列代数式① $\frac{1}{x}$ ，② $\frac{a+b}{2}$ ，③ $\frac{a}{\pi}$ ，④ $\frac{1}{m-n}$ 中，分式有()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】①④是分式；故选 B.

2. 当 x 为何值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{3}{2x-1}$;

(2) $\frac{3x-2}{4x^2-1}$;

(3) $\frac{2}{|x|-4}$;

(4) $\frac{2x}{x-a}$.

【答案】(1) $x \neq \frac{1}{2}$;

(2) $x \neq \pm \frac{1}{2}$;

(3) $x \neq \pm 4$;

(4) $x \neq a$.

3. 当 x 取何值时，下列分式的值为零？

(1) $\frac{x^2-4}{x+2}$

(2) $\frac{x^2+2x-3}{|x|-1}$

(3) $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

(4) $\frac{5-|x|}{x^2+4x-5}$.

【答案】(1) $x=2$;

(2) $x=-3$;

(3) $x=-1$;

(4) $x=5$.

4. 在分式 $\frac{2x}{x+y}$ 中，若将 x 、 y 都扩大为原来的 2 倍，则所得分式的值()

A. 不变 B. 是原来的 2 倍 C. 是原来的 4 倍 D. 无法确定

【答案】A.

5. 若把分式 $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 中的 x 和 y 都扩大 2 倍, 那么分式的值()

A. 扩大 2 倍 B. 不变 C. 缩小 2 倍 D. 缩小 4 倍

【答案】B

6. 若 x 、 y 的值均扩大为原来的 3 倍, 则下列分式的值保持不变的是()A. $\frac{x}{y+1}$ B. $\frac{x-y}{x+1}$ C. $\frac{x^2}{x+y}$ D. $\frac{3x}{x+y}$

【答案】D

7. (1) $\frac{a+b}{ab} = \frac{(\quad)}{a^2b}$; (2) $\frac{x^2+xy}{x^2} = \frac{x+y}{(\quad)}$; (3) $\frac{(\quad)}{x^2-4y^2} = \frac{x}{x+2y}$; (4) $\frac{6a^2-2ab}{(\quad)} = 3a-b$.【答案】(1) a^2+ab ; (2) x ; (3) x^2-2xy ; (4) $2a$.

8. 不改变分式的值, 把下列各式的分子、分母中各项系数都化成整数:

(1) $\frac{2a - \frac{3b}{2}}{5a + \frac{5}{3}b}$;

(2) $\frac{0.25x^2 + 0.5y^2}{0.75x^2 - 2y^2}$;

(3) $\frac{0.2x - 0.4y}{\frac{1}{5}x + 3y}$;

(4) $\frac{0.5m - 0.3n}{2m - 3n}$.

【答案】(1) $\frac{2a - \frac{3b}{2}}{5a + \frac{5}{3}b} = \frac{12a - 9b}{30a + 10b}$;

(2) $\frac{0.25x^2 + 0.5y^2}{0.75x^2 - 2y^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{3x^2 - 8y^2}$;

(3) $\frac{0.2x - 0.4y}{\frac{1}{5}x + 3y} = \frac{x - 2y}{x + 15y}$;

(4) $\frac{0.5m - 0.3n}{2m - 3n} = \frac{m}{10m - 15n}$.

9. 下列各式是怎样从左边变形到右边的？需要满足的条件是什么？

$$(1) \frac{a}{2x} = \frac{ay}{2xy};$$

$$(2) \frac{(m-n)}{2(m-n)^2} = \frac{1}{2(m-n)}.$$

【答案】(1) 左边分子分母同时乘以 y ，是 $y \neq 0$ ；

(2) 左边分子分母同时除以 $(m-n)$ ， $m \neq n$ 。

10. 下列代数式变形正确的是()

$$A. \frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}$$

$$B. \frac{a(c^2+1)}{b(c^2+1)} = \frac{a}{b}$$

$$C. \frac{0.2x}{0.1x+2y} = \frac{2x}{x+2y}$$

$$D. -\frac{x+y}{-x-y} = \frac{x+y}{x-y}$$

【答案】B

11. 下列各式从左到右的变形正确的是()

$$A. \frac{a^2}{a^3b} = \frac{a^2}{b}$$

$$B. \frac{a+3c}{a} = 3c$$

$$C. \frac{a-3}{a^2-9} = \frac{1}{a-3}$$

$$D. \frac{a^2-9}{a^2-6a+9} = \frac{a+3}{a-3}$$

【答案】D

12. 约分：

$$(1) \frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$$

$$(2) \frac{3ax^3y-3x^3y}{9xy^2-9axy^2}.$$

【答案】(1) 原式 $= \frac{a-3}{a+3}$ ；

(2) 原式 $= -\frac{x^2}{3y}$ ；

13. 化简下列分式：

$$(1) \frac{-2x^3y}{4x^2y^2};$$

$$(2) \frac{x^2-9}{x-3};$$

$$(3) \frac{x^2-6x+9}{2x-6};$$

$$(4) \frac{xy-2y}{x^2-4x+4}.$$

【答案】(1) $-\frac{x}{2y}$;

(2) $x+3$;

(3) $\frac{x-3}{2}$;

(4) $\frac{y}{x-2}$.

14. 下列分式是否是最简分式？如果不是，请化简为最简分式

(1) $\frac{2xy}{4xyz}$

(2) $\frac{2ab(a+b)}{(a+b)^2}$

(3) $\frac{-(2-x)^2}{-(y-2)(x-2)}$

(4) $\frac{m-2n}{m^2-4mn+4n^2}$

(5) $\frac{6x^2-12xy+6y^2}{3x-3y}$

(6) $\frac{2x-y}{y^2-4x^2}$.

【答案】(1) 不是, $\frac{2xy}{4xyz} = \frac{1}{2z}$

(2) 不是, $\frac{2ab(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{2ab}{a+b}$

(3) 不是, $\frac{-(2-x)^2}{-(y-2)(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{(y-2)(x-2)} = \frac{x-2}{y-2}$

(4) 不是, $\frac{m-2n}{m^2-4mn+4n^2} = \frac{m-2n}{(m-2n)^2} = \frac{1}{m-2n}$

(5) 不是, $\frac{6x^2-12xy+6y^2}{3x-3y} = \frac{6(x-y)^2}{3(x-y)} = 2x-2y$

(6) 不是, $\frac{2x-y}{y^2-4x^2} = \frac{2x-y}{-(2x-y)(2x+y)} = -\frac{1}{2x+y}$.

15. 已知 $a^2 + b^2 = (a + b - c)^2$ ，且 $b^2 \neq 0$ ，化简： $\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2}$ 。

【解答】解： $\because a^2 + b^2 = (a + b - c)^2$ ，

$$\therefore a^2 = (a + b - c)^2 - b^2,$$

$$= (a + b - c + b)(a + b - c - b)$$

$$= (a + 2b - c)(a - c).$$

同理， $b^2 = (2a + b - c)(b - c)$ 。

$$\therefore \frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2}$$

$$= \frac{(a + 2b - c)(a - c) + (a - c)^2}{(2a + b - c)(b - c) + (b - c)^2}$$

$$= \frac{(a - c)(a + 2b - c + a - c)}{(b - c)(2a + b - c + b - c)}$$

$$= \frac{(a - c)(2a + 2b - 2c)}{(b - c)(2a + 2b - 2c)}$$

$$= \frac{a - c}{b - c}.$$

习题 L8-22：分式与分式运算（二）

参考答案与试题解析

1. 使式子 $\frac{x+3}{x-3} \div \frac{x+2}{x+4}$ 有意义的 x 的取值范围是()

A. $x \neq 3$ 且 $x \neq -4$

B. $x \neq 3$ 且 $x \neq -2$

C. $x \neq 3$ 且 $x \neq -3$

D. $x \neq -2$, $x \neq 3$ 且 $x \neq -4$

【答案】D

2. 通分：

(1) $\frac{3c}{2ab^2}$, $-\frac{a}{8bc^2}$;

(2) $\frac{y}{2x^2}$, $\frac{5}{6xy^2z}$, $\frac{4c}{3xy}$;

(3) $\frac{1}{(2-x)^2}$, $\frac{x}{(x+2)(x-2)}$;

(4) $\frac{y}{x(x-y)^2}$, $\frac{x}{(y-x)^3}$;

(5) $\frac{1}{x^2+x}$, $\frac{-1}{x^2+2x+1}$;

(6) $\frac{x+1}{x}$, $\frac{x}{2x+6}$, $\frac{x-1}{x^2-9}$.

【答案】(1) $\frac{12c^3}{8ab^2c^2}$, $-\frac{a^2b}{8ab^2c^2}$.

(2) $\frac{3y^3z}{6x^2y^2z}$, $\frac{5x}{6x^2y^2z}$, $\frac{8xyzc}{6x^2y^2z}$.

(3) $\frac{x+2}{(x+2)(x-2)^2}$, $\frac{x^2-2x}{(x+2)(x-2)^2}$.

(4) $\frac{xy-y^2}{x(x-y)^3}$, $-\frac{x^2}{x(x-y)^3}$.

(5) $\frac{x+1}{x(x+1)^2}$, $\frac{-x}{x(x+1)^2}$.

(6) $\frac{2(x+1)(x+3)(x-3)}{2x(x+3)(x-3)}$, $\frac{x^3-3x^2}{2x(x+3)(x-3)}$, $\frac{2x^2-2x}{2x(x+3)(x-3)}$.

3. 计算：

(1) $\frac{12x^2y}{xy^2} \cdot \frac{-2xy}{18x^3y}$;

(2) $-\frac{b}{2a} \div \frac{3b}{4a} \cdot \frac{2a}{3b}$;

(3) $\frac{x}{x^2y-y} \div \frac{x^2y}{x^2+x}$;

$$(4) \frac{16-m^2}{16+8m+m^2} \div \frac{m-4}{2m+8} \cdot \frac{m-2}{m+2};$$

$$(5) \frac{x+y}{x-y} \div (xy+x^2).$$

【答案】(1) $-\frac{4}{3xy}$;

$$(2) -\frac{4a}{9b};$$

$$(3) \frac{1}{y^2(x-1)};$$

$$(4) -\frac{2m-4}{m+2};$$

$$(5) \frac{1}{x^2-xy}.$$

4. 计算：

$$(1) \left(-\frac{2b^2}{a^3}\right)^3;$$

$$(2) \left(\frac{c^3}{a^2b}\right)^2 \div \left(\frac{c^4}{a^3b}\right)^2 \div \left(\frac{a}{c}\right)^4;$$

$$(3) \left(-\frac{a^2}{b^{n+1}}\right)^2;$$

$$(4) \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2 \cdot \left(\frac{-a}{b-a}\right)^3 \cdot (a^2-b^2);$$

$$(5) 8x^2 \cdot \left(-\frac{3x}{4y^3}\right) \cdot \left(-\frac{6z}{x^2y}\right);$$

$$(6) \left(\frac{-x^2y}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2}{-xy}\right)^2 \div \left(\frac{ay}{x}\right)^4.$$

【答案】(1) $-\frac{8b^6}{a^9}$; (2) $\frac{c^2}{a^2}$; (3) $\frac{a^4}{b^{2n+2}}$; (4) $\frac{a^2+ab}{b^2}$; (5) $\frac{36xz}{y^4}$; (6) $-\frac{x^8}{y^3a^3}.$

5. 计算：

$$(1) \frac{a}{a^2-25b^2} - \frac{1}{2a-10b};$$

$$(2) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1};$$

$$(3) \frac{x^2}{x+y} - x + y.$$

【答案】(1) $\frac{1}{2a+10b}$; (2) $-\frac{x-1}{x+1}$; (3) $\frac{y^2}{x+y}.$

6. 计算：

$$(1) \frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3}$$

$$(2) \frac{m+n}{4m^2-n^2} + \frac{m-2n}{4m^2-n^2}$$

$$(3) \frac{x^2}{x-2} - \frac{4x}{x-2} + \frac{4}{x-2}$$

$$(4) \frac{3b-a}{a^2-b^2} - \frac{a+2b}{a^2-b^2} + \frac{3a-4b}{a^2-b^2}$$

【答案】(1) $a-3$;

$$(2) \frac{1}{2m+n};$$

$$(3) x-2;$$

$$(4) \frac{a-3b}{a^2-b^2}.$$

习题 L8-23：整数指数幂

参考答案与试题解析

1. 5^{-3} 可以表示为 ()

A. $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

B. $\frac{1}{5 \times 5 \times 5}$

C. $-5 \times 5 \times 5$

D. $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$

【答案】B

2. 计算： $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi + 1)^0$.

【答案】3.

3. 计算： $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \div 2^3 - (-2)^{-2}$.【答案】 $\frac{7}{8}$.4. 计算 -3^{-2} 的结果是 ()

A. -9

B. -6

C. $-\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{9}$

【答案】C

5. 计算：

(1) $-1^{2008} \times \left| -\frac{3}{4} \right| + (3.14 - \pi)^0 - 2^{-2}$.

(2) $2^{24} \times (-0.125)^8 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{100} \times \left(-1\frac{1}{2}\right)^{101}$.

【答案】(1) 0; (2) $-\frac{1}{2}$.6. (1) 计算判断： $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ _____ $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ _____ $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ (填“>”“<”或“=”);(2) 猜想发现： $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ _____ $\left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, m 是正整数, 填“>”“<”或“=”);(3) 拓展应用：计算 $\left(\frac{7}{15}\right)^{-2} \times \left(\frac{7}{5}\right)^2$ 的结果为_____.

【答案】(1) =, =; (2) =; (3) 9.

7. 若 $a = -2^2$, $b = 2^{-2}$, $c = -2^{-2}$, 则 ()

- A. $a < c < b$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $a < b < c$

【答案】A

8. 若 $7^{2-3x} = 1$ ，则 x 的值为_____；若 $(-3)^y = -\frac{1}{27}$ ，则 y 的值为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$; -3.

9. 若 $10^x = 10$ ， $10^y = \frac{1}{10}$ ，则 x, y 之间的关系为（ ）

- A. x, y 互为相反数 B. x, y 互为倒数
C. $x=y$ D. 无法判断

【答案】A

10. 已知： $27^2 = a^6 = 9^{-b}$. 求： $(a+b-1)^{2019}$ 的值.

【答案】 -7^{2019} 或 -1 .

【分析】 $\because 27^2 = a^6 = 9^{-b}$,

$$\therefore 3^6 = a^6 = 3^{-2b},$$

$$\therefore a = \pm 3, \quad -2b = 6,$$

$$\therefore a = \pm 3, \quad b = -3,$$

(1) $a = -3, b = -3$ 时,

$$(a+b-1)^{2019}$$

$$= [-3 + (-3) - 1]^{2019}$$

$$= (-7)^{2019}$$

$$= -7^{2019}.$$

(2) $a = 3, b = -3$ 时,

$$(a+b-1)^{2019}$$

$$= [3 + (-3) - 1]^{2019}$$

$$= (-1)^{2019}$$

$$= -1.$$

11. 用科学记数法表示下列各数:

(1) 2503000;

(2) 0.05056;

(3) 0.0000389;

(4) -0.000451 .

【答案】(1) $2503000 = 2.503 \times 10^6$;

(2) $0.05056 = 5.056 \times 10^{-2}$;

(3) $0.0000389 = 3.89 \times 10^{-5}$;

(4) $-0.000451 = -4.51 \times 10^{-4}$.

12. 把 1.001×10^{-9} , 9.99×10^{-8} , 1.002×10^{-8} , 9.9999×10^{-7} 按照由小到大排列, 并用 “ $<$ ” 连接.

【答案】 $1.001 \times 10^{-9} < 1.002 \times 10^{-8} < 9.99 \times 10^{-8} < 9.9999 \times 10^{-7}$

习题 L8-24：分式方程

参考答案与试题解析

1. 下列关于 x 的方程① $\frac{x-4}{y} = x+y$ ，② $\frac{1}{x} = 5$ ，③ $\frac{x-1}{\pi} = x-3$ ，④ $\frac{x}{a} = \frac{1}{b-1}$ 中，是分式方程的有()个.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 A

【分析】 ②是分式方程.

2. 解下列方程：

$$(1) \frac{3}{x-2} - \frac{x}{2-x} = -4;$$

$$(2) \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1;$$

$$(3) \frac{7-9x}{2-3x} - \frac{4x-5}{2-3x} = 1;$$

$$(4) \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{1-x}{2-x}.$$

【答案】 (1) $x=1$;

(2) 无解;

(3) $x=1$;

(4) 无解.

3. 解方程：

$$(1) \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = 0;$$

$$(2) \frac{5x-4}{2x-4} = \frac{2x+5}{3x-6} - \frac{1}{2};$$

$$(3) \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{x^2+x-2};$$

$$(4) \frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x-2}.$$

【答案】 (1) $x = -\frac{1}{2}$;

(2) 无解;

(3) 无解;

(4) $x=3$.

4. 当 a 为何值时, 方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{8x+a}{2x(x-1)} = \frac{x}{1-x}$ 会产生增根?

【解答】方程两边同乘 $2x(x-1)$, 得 $2(x-1)^2 - (8x+a) = -2x^2$,

$\therefore x=1$ 或 $x=0$ 是原方程的增根, 但它是上面整式方程的根,

将 $x=1$ 代入, 得 $2(1-1)^2 - (8+a) = -2 \times 1^2$, 解得 $a=-6$;

将 $x=0$ 代入, 得 $2(0-1)^2 - (0+a) = -2 \times 0^2$, 解得 $a=2$.

当 a 为 -6 或 2 时, 方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{8x+a}{2x(x-1)} = \frac{x}{1-x}$ 会产生增根.

5. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x}{x-2} - 1 = \frac{m}{2-x}$ 的解为负数, 求 m 的取值范围.

【解答】方程 $\frac{2x}{x-2} - 1 = \frac{m}{2-x}$ 两边同乘以 $x-2$, 得 $2x - (x-2) = -m$,

解得, $x = -2 - m$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $\frac{2x}{x-2} - 1 = \frac{m}{2-x}$ 的解为负数,

$\therefore -2 - m < 0$, 解得 $m > -2$, 即 m 的取值范围是 $m > -2$.

6. 若关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x-1} - \frac{m}{1-x^2} = 1$ 的解是非负数, 求 m 的取值范围.

【解答】去分母得: $(x+1)^2 + m = x^2 - 1$, 解得 $x = \frac{-m-2}{2}$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x-1} - \frac{m}{1-x^2} = 1$ 的解是非负数,

$\therefore \frac{-m-2}{2} \geq 0$, 解得: $m \leq -2$,

$\therefore (x+1)(x-1) \neq 0$, $\therefore \frac{-m-2}{2} \neq \pm 1$,

$\therefore m \neq 0$ 或 -4 ,

所以 m 的取值范围是 $m \leq -2$ 且 $m \neq -4$.

7. 已知关于 x 的方程 $\frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-1} = \frac{mx}{x^2-1}$.

(1) 若方程的增根为 $x=1$, 求 m 的值;

(2) 若方程有增根, 求 m 的值;

(3) 若方程无解, 求 m 的值.

【答案】(1) m 的值为 -10 ;

(2) m 的值为 4 或 -10 ;

(3) m 的值为 -3 或 4 或 -10 .

【解答】 $\frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-1} = \frac{mx}{x^2-1}$, $2(x-1) - 5(x+1) = mx$, $(m+3)x = -7$,

(1) 把 $x=1$ 代入 $(m+3)x = -7$ 中可得: $m+3 = -7$, $\therefore m = -10$,

$\therefore m$ 的值为 -10 ;

(2) $\therefore$ 方程有增根, $\therefore (x+1)(x-1) = 0$, $\therefore x=1$ 或 $x=-1$,

把 $x=1$ 代入 $(m+3)x = -7$ 中可得: $m+3 = -7$, $\therefore m = -10$,

把 $x=-1$ 代入 $(m+3)x = -7$ 中可得: $-m-3 = -7$, $\therefore m = 4$,

$\therefore m$ 的值为 4 或 -10 ;

(3) 分两种情况:

当 $m+3=0$ 时, $m=-3$,

当 $m+3 \neq 0$ 时, 分式方程有增根, 此时 m 的值为 4 或 -10 ,

综上所述: m 的值为 -3 或 4 或 -10 .

8. 若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 \leq \frac{1}{2}(x-1) \\ 2x - a \leq 3(1-x) \end{cases}$ 有且仅有三个整数解, 且使关

于 y 的分式方程 $\frac{3y}{y-2} + \frac{a+12}{2-y} = 1$ 有整数解, 求满足条件的所有 a 的值之和.

【答案】 -12 .

【解答】 $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 \leq \frac{1}{2}(x-1) & \text{①} \\ 2x - a \leq 3(1-x) & \text{②} \end{cases}$,

解不等式①得: $x \geq -3$,

解不等式②得: $x \leq \frac{3+a}{5}$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为: $-3 \leq x \leq \frac{3+a}{5}$,

$\therefore$ 不等式组有且仅有三个整数解,

$\therefore -1 \leq \frac{3+a}{5} < 0$, 得: $-8 \leq a < -3$.

$\frac{3y}{y-2} + \frac{a+12}{2-y} = 1$, 解得: $y = \frac{a+10}{2}$,

$\therefore$ 分式方程有整数解, $\therefore \frac{a+10}{2}$ 的值为整数, 且 $\frac{a+10}{2} \neq 2$,

$\therefore$ 满足条件的所有 a 的值为: $-8, -4$,

$\therefore$ 满足条件的所有 a 的值之和为: -12 .