



1.3.2.4 题型4：二次分式最值速算技巧

【例1】 难度 ★☆☆

$$y = \frac{x^2}{2x-1} \left(x > \frac{1}{2} \right), x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时, } y \text{ 取最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例2】 难度 ★☆☆

$$y = \frac{(x-1)^2}{x-2} (x > 2), x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时, } y \text{ 取最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例3】 难度 ★☆☆

$$y = \frac{x-2}{(x-1)^2} (x > 2), x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时, } y \text{ 取最大值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

4 ☆☆☆

设点 M 是直线 $y = -1$ 上的一个动点, O 为坐标原点, 过点 M 作 x 轴的垂线 l . 过点 O 作直线 OM 的垂线交直线 l 于 P .

(2) 过曲线 C 上的一点 P (异于原点 O) 作曲线 C 的切线 l_1 交椭圆 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ 于 A, B 两点, 求

$\triangle AOB$ 面积的最大值.

参考答案:

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} \times \frac{|m|}{1+k^2} \times \left(\frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{3k^2+4-m^2}}{3k^2+4} \right) = \frac{2\sqrt{3} |m| \times \sqrt{3k^2+4-m^2}}{3k^2+4} \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{m^2} \times \sqrt{3k^2+4-m^2}}{3k^2+4} \leq 2\sqrt{3} \times \frac{\frac{m^2+3k^2+4-m^2}{2}}{3k^2+4} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases} 3k^2+4-m^2=m^2 \\ k^2+4m=0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} m=-3-\sqrt{11} \\ k^2=12+4\sqrt{11} \end{cases}$ (此时满足 $3k^2+4>m^2$) 时, 等号成立.

故 $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

【例5】 难度 ☆☆☆

抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 被直线 $y = 2x - 3$ 截得的弦的中点 M 的纵坐标为 1.

(2) 过抛物线的焦点 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与抛物线相交于 A, B 两点, 直线 l_2 与抛物线相交于 C, D 两点, 求四边形 $ACBD$ 的面积 S 的最小值.

参考答案:

$$\begin{aligned} \text{则四边形 } ACBD \text{ 的面积 } S &= |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(1+k^2)}{k^2} \cdot 4(k^2+1) \\ &= 8\left(k^2 + \frac{1}{k^2} + 2\right) \geq 16 + 16\sqrt{k^2 \cdot \frac{1}{k^2}} = 32, \end{aligned}$$

当且仅当 $k^2 = \frac{1}{k^2}$, 即 $k = \pm 1$ 时, 等号成立.

故所以四边形 $ACBD$ 的面积最小值为 32.

6

☆☆☆

已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 为双曲线的左、右焦点, 离心率为 2, 点 P 为双曲线在第一象限上的一点, 且满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, $|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| = 6$.

(2) 过点 F_2 作斜率不为 0 的直线 l 交双曲线于 A, B 两点; 则在 x 轴上是否存在定点 $Q(m, 0)$ 使得

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 为定值, 若存在, 请求出 m 的值及此时 $\triangle QAB$ 面积的最小值, 若不存在, 请说明理由.

参考答案:

$$\text{此时 } S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} |QF_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 3 \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{144t^2}{(3t^2-1)^2} - \frac{36}{3t^2-1}} = \frac{9\sqrt{t^2+1}}{|3t^2-1|},$$

$$\text{又 } y_1y_2 = \frac{9}{3t^2-1} < 0, 3t^2-1 < 0, \text{ 则 } S_{\triangle QAB} = \frac{9\sqrt{t^2+1}}{1-3t^2}, \text{ 令 } \sqrt{t^2+1} = u, \text{ 则 } u \geq 1,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle QAB} = \frac{9u}{4-3u^2} = \frac{9}{\frac{4}{u}-3u}, \text{ 又 } y = \frac{4}{u} - 3u \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

所以当 $u=1$, 即 $t=0$, l 方程为 $x=2$ 时, $\triangle QAB$ 面积取到最小值, 且 $(S_{\triangle QAB})_{\min} = 9$.

7 ☆☆☆

已知 $A(-2, 0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点, 过点 $D(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点(异于点 A), 当直线 l 的斜率不存在时, $|PQ| = 3$.

(2) 求 $\triangle APQ$ 面积的最大值.

参考答案:

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 1 + m^2 \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{1+m^2}{(3m^2+4)^2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{1+m^2}} = 18 \cdot \frac{\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4},$$

$$\text{令 } t = \sqrt{m^2+1}, t \geq 1, \text{ 则 } m^2 = t^2 - 1,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} = \frac{18t}{3(t^2-1)+4} = \frac{18t}{3t^2+1} = \frac{18}{3t+\frac{1}{t}},$$

$$\text{对于 } y = 3t + \frac{1}{t}, t \geq 1,$$

由对勾函数的性质可得当 $t \geq 1$ 时, $y = 3t + \frac{1}{t}$ 单调递增,

所以当 $t = 1$ 时, $y_{\min} = 4$, $S_{\triangle APQ}$ 最大值为 $\frac{9}{2}$