

考点 2.1.3 平面向量坐标表示及运算

【知识梳理】

1. 平面向量的坐标表示:

在平面直角坐标系中, 设与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量分别为 $\boldsymbol{i}$ 、 $\boldsymbol{j}$, 对于平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.

我们把有序数对叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标, 记作 $\boldsymbol{a} = (x, y)$. 其中, x 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标, y 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标, (x, y) 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示.

2. 平面向量加、减法运算的坐标表示:

已知 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$

3. 平面向量数乘运算的坐标表示:

已知 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 则 $\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

4. 中点坐标公式:

若点 P_1 的坐标为 (x_1, y_1) , P_2 的坐标为 (x_2, y_2) , 则线段 P_1P_2 的中点坐标可以表示为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

5. 平面向量数量积的坐标表示:

已知 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

6. 平面向量的模长公式:

已知 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标为 (x_1, y_1) , 终点坐标为 (x_2, y_2) , 则 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

7. 平面向量 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ 互相垂直的充要条件: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

8. 坐标表示下的平面向量夹角计算公式:

已知 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\cos \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

9. 平面向量数量积的求解方法

(1) 定义法

方法及阐释: 数量积定义: 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 它们的夹角为 θ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

识别与应用: 已知或易求对应向量的模长与夹角, 优先考虑定义法计算

(2) 坐标法

方法及阐释：数量积的坐标公式， $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ ，

坐标法的意义在于将几何问题代数化、符号化、进而通过代数方法解决问题

识别与应用：坐标法是解决向量数量积的通用方法，一般在具备垂直(易建系)、点的坐标易写出，或含有动点的数量积问题较为适用

(3) 投影法

方法及阐释：向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积等于一个向量的模长乘以另一个向量在该向量上的投影 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|(|\vec{b}| \cos \theta)$ 或 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|(|\vec{a}| \cos \theta)$ ，利用投影可实现降元，以形助数快速求解数量积

识别与应用：若数量积的相关要素(对应的模、夹角)未知或不易直接求出，而在图形中存在投影垂足确定的情况，亦或者其一向量的模长为定值，即可考虑利用投影计算数量积

(4) 极化恒等式

方法及阐释：已知平面上三点 A 、 B 、 C ，点 M 为 BC 的中点，则 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AM}|^2 - |\vec{BM}|^2$

识别与应用：计算共起点向量数量积过程中，若数量积的相关要素(对应的模、夹角)未知或不易直接求出，而存在定线段长，如底边 BC 或中线 AM 确定，即可考虑使用极化恒等式，将数量积转化为线段长相关的代数计算

(5) 基底法

方法及阐释：若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 可用基底 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 表示，例如 $\vec{a} = m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2$ ， $\vec{b} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ ，那么数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2) \cdot (p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2)$ ，此时 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积计算，即可转化为基底的数量积运算

识别与应用：若向量数量积的相关要素(对应的模、夹角)未知或不易直接求出，即可考虑把已知向量利用合适的基底表示，进而转化基底运算求解

【典型例题】

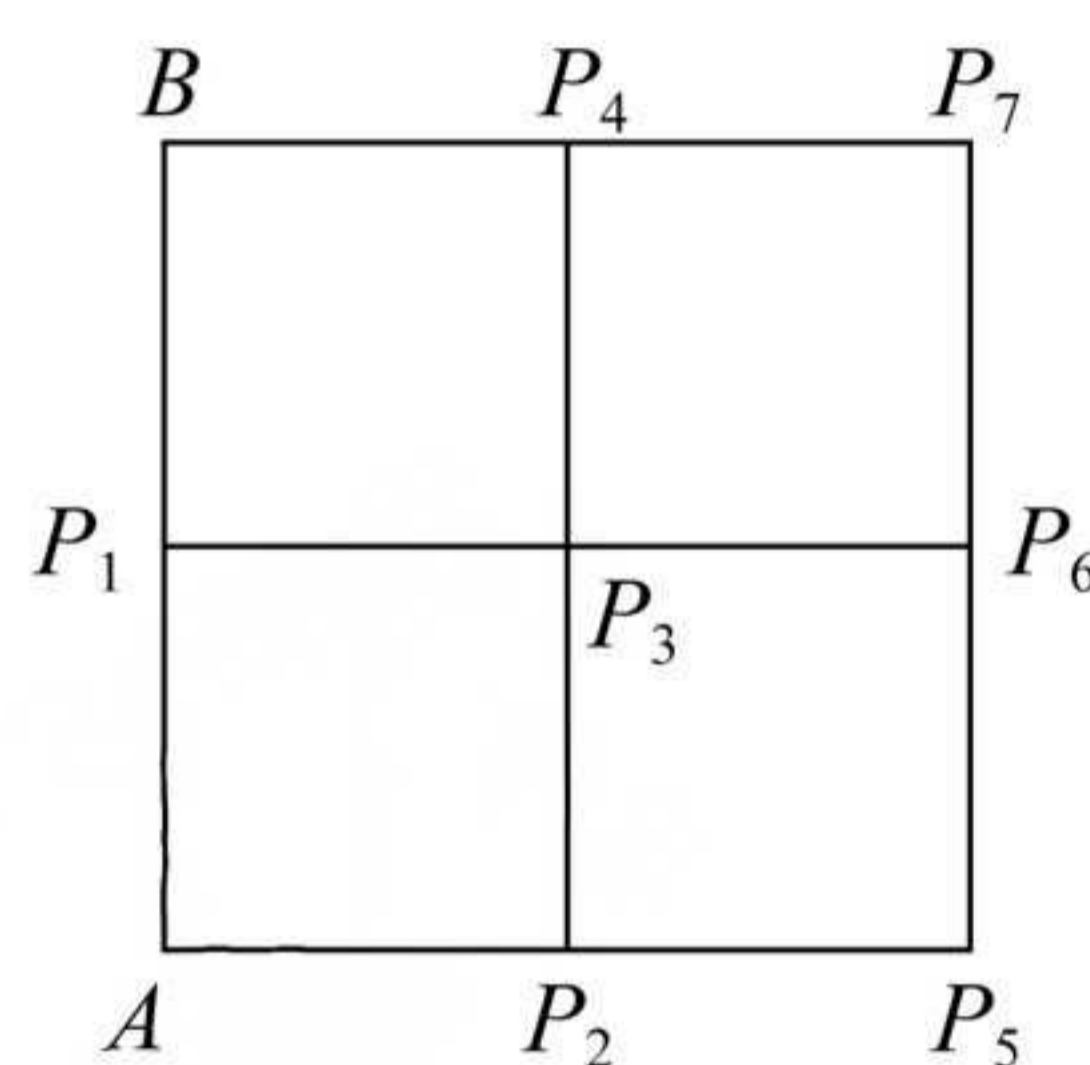


2.1.3.1 数量积的综合应用

难度 ★★★★★

【例 1】 难度 ★★☆☆

(2014 上海高考真题 17) 如图, 四个边长为 1 的小正方形排成一个大正方形, AB 是大正方形的一条边, $P_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 是小正方形的其余顶点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i} (i=1, 2, \dots, 7)$ 的不同值的个数为 ()



A. 7

B. 5

C. 3

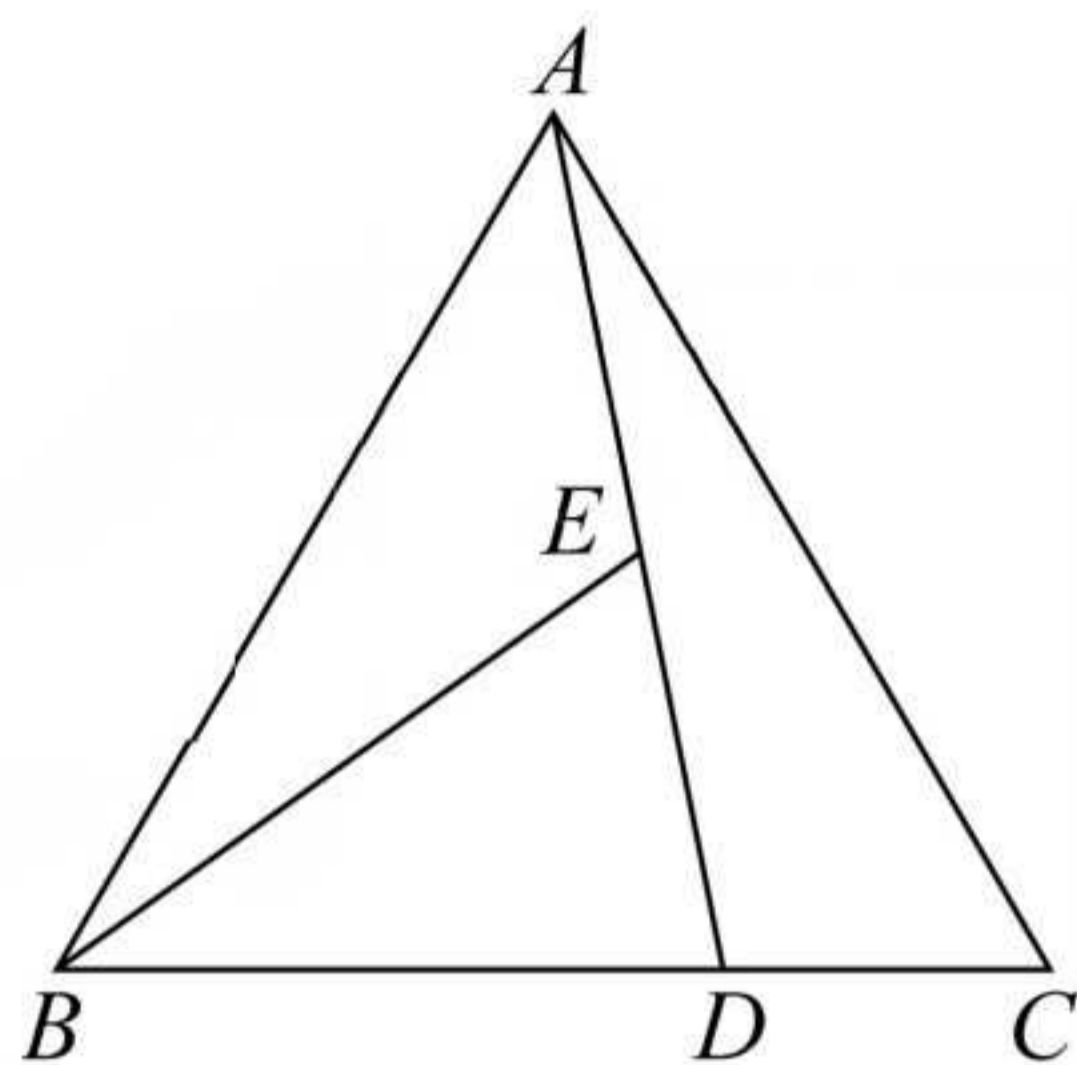
D. 1

【例 2】 难度 ★★☆☆

(2020 北京高考真题 13) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则 $|\overrightarrow{PD}| =$ _____; $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} =$ _____.

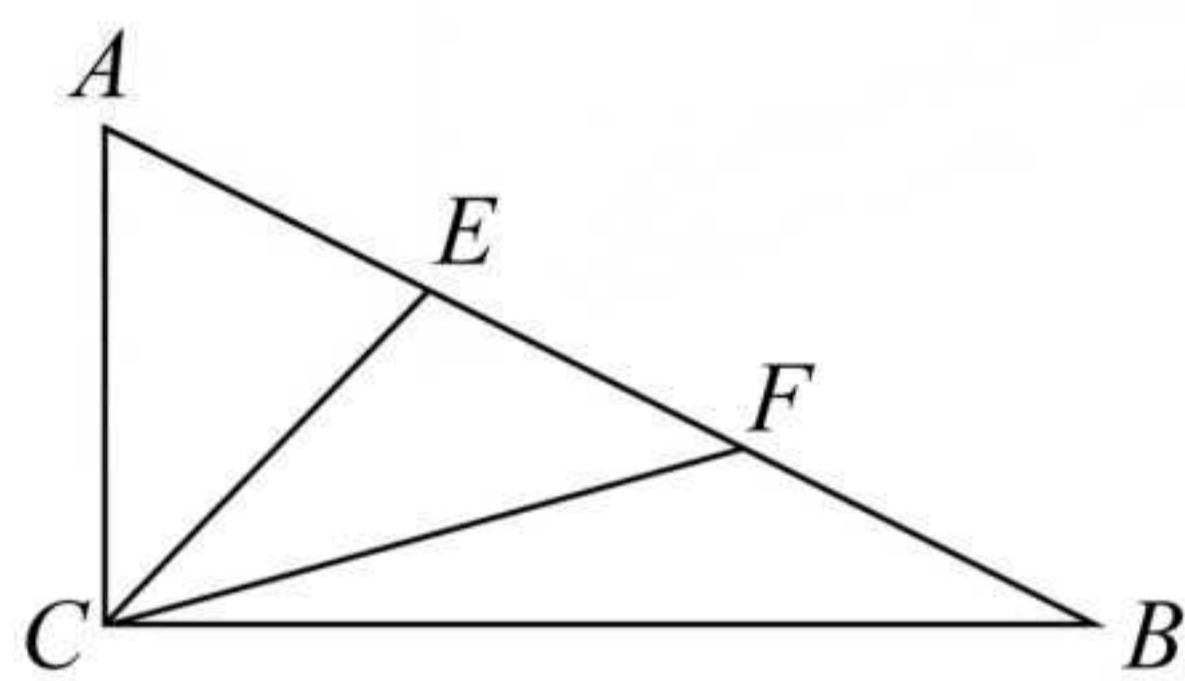
3 ☆☆☆

如图, $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, D 在线段 BC 上, 且 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, E 为线段 AD 上中点, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值为 _____.



【例 4】 难度 ☆☆☆

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 两直角边 $CA = 3$, $CB = 6$, 点 E, F 分别为斜边 AB 的三等分点, 则 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} =$ _____.



【例 5】 难度 ☆☆☆

(2015 天津文数高考真题 14) 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel DC$, $AB = 2$, $BC = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 _____.

6

☆☆☆

(2015 福建理数高考真题 9) 已知 $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, $|\vec{AB}| = \frac{1}{t}$, $|\vec{AC}| = t$, 若 P 点是 $\triangle ABC$ 所在平面内

一点, 且 $\vec{AP} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{4\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$, 则 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ 的最大值等于 ()

A. 13

B. 15

C. 19

D. 21

【例 7】 难度 ☆☆☆

(2022 上海高考真题 6) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, 点 M 为边 AB 的中点, 点 P 在边 BC 上, 则 $\vec{MP} \cdot \vec{CP}$ 的最小值为 _____.

【例 8】 难度 ☆☆☆

(2021 天津高考真题 15) 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中, D 为线段 BC 上的动点, $DE \perp AB$ 且交 AB 于点 E , $DF \parallel AB$ 且交 AC 于点 F , 则 $|2\vec{BE} + \vec{DF}|$ 的值为 _____; $(\vec{DE} + \vec{DF}) \cdot \vec{DA}$ 的最小值为 _____.