

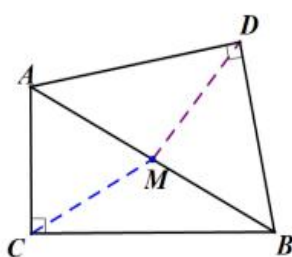
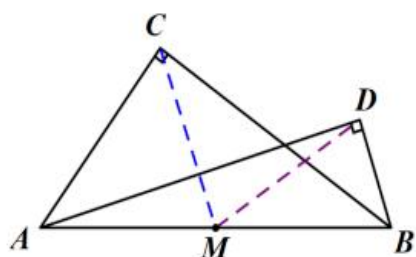
1.3 构造直角三角形斜边中线

【知识要点】

1. 遇到直角三角形，可尝试取斜边中点，并连接直角顶点，应用直角三角形斜边中线的性质。
2. 直角三角形斜边中线一般可以用来证明线段的倍分关系及角的倍分关系。
3. 遇存在公共边的两个直角三角形时，要想到构造两个直角三角形斜边的中线。

如图， $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle ABD$ 有公共斜边 AB

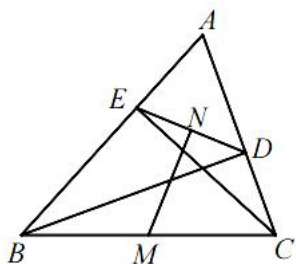
辅助线作法：取 AB 中点 M ，连接 CM 、 DM ，可证明 $CM=DM$ 。



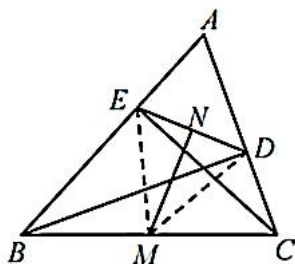
青铜级别

【例 1】如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 垂直 AC 于 D ， CE 垂直 AB 于 E ， M ， N 分别是 BC ， DE 的中点。

- (1) 求证： $MN \perp DE$ 。(2) 若 $BC=20$ ， $DE=12$ ，求 $\triangle MDE$ 的面积。



【答案】(1) 连接 ME 、 MD ， $BD \perp AC$ ， $\angle BDC=90^\circ$ ，



$\because M$ 是 BC 的中点， $\therefore DM = \frac{1}{2}BC$ ，同理可得 $EM = \frac{1}{2}BC$ ， $DM=EM$ ，

$\because N$ 是 DE 的中点, $MN \perp DE$.

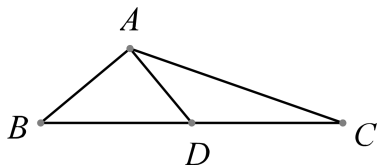
(2) $\because BC=20, ED=12$,

$$DM = \frac{1}{2} BC = 10, \quad DN = \frac{1}{2} DE = 6,$$

由 (1) 可知 $\angle MND = 90^\circ$,

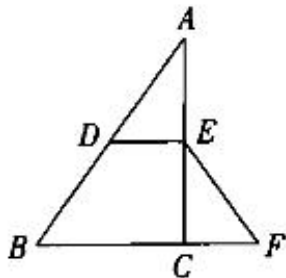
$$MN = \sqrt{MD^2 - DN^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8, \quad S_{\triangle MDE} = \frac{1}{2} DE \cdot MN = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48.$$

【例 2】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=13$, 边 BC 上的中线 $AD=6$, 则 BC 的长为_____.

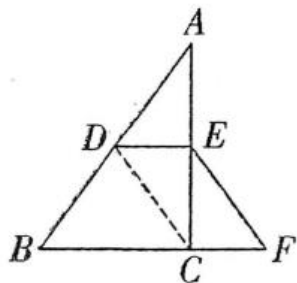


【答案】 $2\sqrt{61}$ 提示: 延长 AD 至 E , 使 $DE=AD$, 连接 BE , 则 $\triangle ACD \cong \triangle EBD$, $\therefore BE=AC=13$, $AE=12$, 又 $AB=5$, 则 $\angle BAD=90^\circ$,

【例 3】 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, D , E 分别是 AB 、 AC 的中点, 延长 BC 到点 F , 使得 $CF=\frac{1}{2}BC$, 连接 DE 、 EF . 求证: $\angle B=\angle F$.



【答案】 证明: 如解图, 连接 CD ,



$\because \angle ACB=90^\circ$, D 为 AB 的中点, $\therefore DC=DB=AD=\frac{1}{2}AB$, $\therefore \angle B=\angle BCD$,

$\because D, E$ 分别是 AB, AC 的中点, F 是 BC 延长线上的一点,

$\therefore DE$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE \parallel CF$, $DE=\frac{1}{2}BC$, $\because CF=\frac{1}{2}BC$, $\therefore DE=CF$

$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是平行四边形,

$\therefore DC \parallel EF$, $\therefore \angle DCB = \angle F$, $\therefore \angle B = \angle BCD$, $\therefore \angle B = \angle F$.

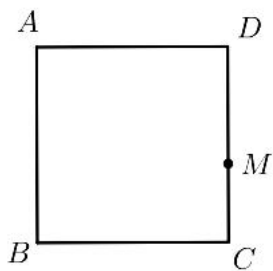


钻石级别

【例 4】 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 M 在 CD 边上, 点 N 在正方形 $ABCD$ 外部, 且满足 $\angle CMN = 90^\circ$, $CM = MN$, 连接 AN , CN , 取 AN 的中点 E , 连接 BE , AC , 交于 F 点.

(1) 回答下列问题: ① 依题意补全图形. ② 求证 $BE \perp AC$.

(2) 请探究线段 BE , AD , CN 所满足的等量关系, 并证明你的结论.



【答案】 (1) ① 依题意补全图形.

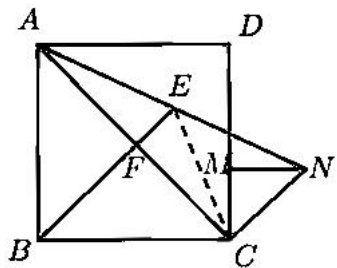
② 方法一: 连接 CE , $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\angle BCD = 90^\circ$, $AB = BC$,

$\angle ACB = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BCD = 45^\circ$, $\because \angle CMN = 90^\circ$, $CM = MN$, $\angle MCN = 45^\circ$,

$\angle ACN = \angle ACD + \angle MCN = 90^\circ$, $\because$ 在 $Rt\triangle ACN$ 中, 点 E 是 AN 中点, $AE = CE = \frac{1}{2} AN$,

$\because AE = CE$, $AB = CB$, $\therefore$ 点 B, E 在 AC 的垂直平分线上, $\therefore BE$ 垂直平分 AC , $\therefore BE \perp AC$



(2) $\because AB = BC$, $\angle ABE = \angle CBE$,

$AF = FC$, $\because$ 点 E 是 AN 中点, $AE = EN$, $\therefore FE$ 是 $\triangle ACN$ 的中位线, $FE = \frac{1}{2} CN$,

$\because BE \perp AC$, $\angle BFC = 90^\circ$, $\therefore \angle FBC + \angle FCB = 90^\circ$,

$\because \angle FCB = 45^\circ$, $\angle FBC = 45^\circ$, $\therefore \angle FCB = \angle FBC$, $\therefore BF = CF$, 在 $Rt\triangle BCF$ 中, $BF^2 + CF^2 = BC^2$,

$BF = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$, $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $BC = AD$, $BF = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$

$\because BE = BF + FE$, $BE = \frac{\sqrt{2}}{2} AD + \frac{1}{2} CN$



王者级别

【例 5】如图 1，在 $Rt\triangle ACB$ 中， C 为直角顶点， $\angle ABC = 25^\circ$ ， O 为斜边中点。将 OA 绕着点 O 逆时针旋转 θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) 至 OP ，当 $\triangle BCP$ 恰为轴对称图形时， θ 的值为多少？

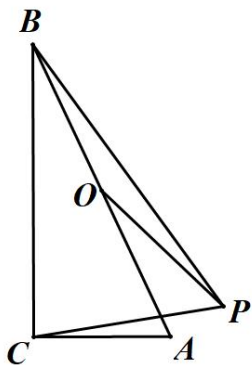
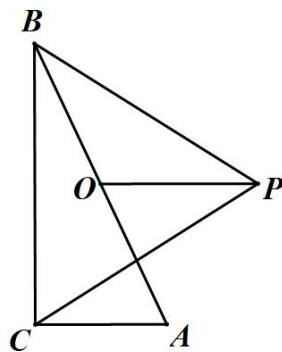
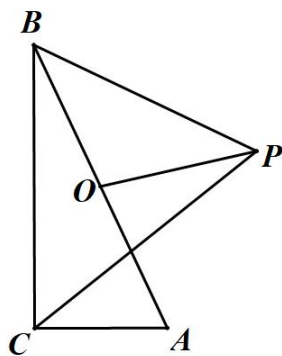
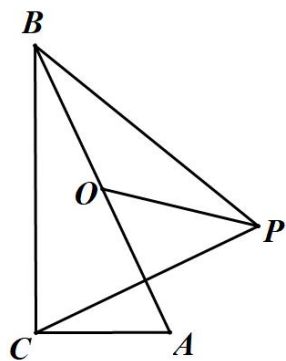


图 1



【答案】 当 $BC = BP$ 时， $\theta = 50^\circ$ ；当 $BC = PC$ 时， $\theta = 80^\circ$ ；当 $PB = PC$ 时， $\theta = 65^\circ$ 。

$\because \triangle BCP$ 恰为轴对称图形， $\therefore \triangle BCP$ 是等腰三角形，如图 2，连接 AP 。

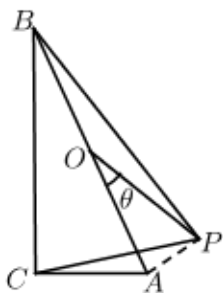


图 2

$\because O$ 为斜边中点， $OP = OA$ ， $\therefore BO = OP = OA$ 。 $\therefore \angle APB = 90^\circ$ 。

当 $BC = BP$ 时， $\because \angle BCP = \angle BPC$ ， $\therefore \angle BCP + \angle ACP = \angle BPC + \angle APC = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle ACP = \angle APC$. $\therefore AC = AP$. $\therefore AB$ 垂直平分 PC . $\therefore \angle ABP = \angle ABC = 25^\circ$. $\therefore \theta = 2 \times 25^\circ = 50^\circ$.

当 $BC = PC$ 时, 如图3,

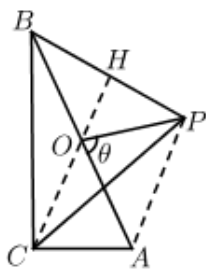


图 3

连接 CO 并延长交 PB 于点 H . $\because BC = CP$, $BO = OP$. $\therefore CH$ 垂直平分 PB .

$\therefore \angle CHB = 90^\circ$, $\because OB = OC$, $\therefore \angle BCH = \angle ABC = 25^\circ$. $\therefore \angle CBH = 65^\circ$. $\therefore \angle OBH = 40^\circ$

$\therefore \theta = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$.

当 $PB = PC$ 时, 如图4

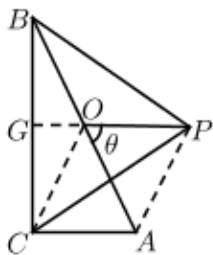


图 4

连接 PO 并延长交 BC 于点 G , 连接 OC . $\because \angle ACB = 90^\circ$, O 为斜边中点,

$\therefore OB = OC$. $\therefore \angle BGO = 90^\circ$, $\therefore PG$ 垂直平分 BC . $\therefore \angle ABC = 25^\circ$, $\therefore \theta = \angle BOG = 65^\circ$.