

L7 拓展篇第一讲—绝对值

参考答案与试题解析

1. 试讨论 $|a|+a$ 的值的情况.

【答案】当 $a \geq 0$ 时, $|a|+a=2a$, 当 $a < 0$ 时, $|a|+a=0$.

【分析】分 $a > 0$, $a=0$, $a < 0$ 三种情况进行化简计算.

解: 当 $a > 0$ 时, $|a|+a=a+a=2a$;

当 $a=0$ 时, $|a|+a=0+0=0$;

当 $a < 0$ 时, $|a|+a=-a+a=0$.

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, $|a|+a=2a$, 当 $a < 0$ 时, $|a|+a=0$.

2. 若 a, b, c 均为整数且满足方程 $(a-b)^8 + (a-c)^8 = 1$,

则 $|a-b|+|a-c|+|b-c| = (\quad)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【分析】根据题意得到 $\begin{cases} a-b=0 \\ a-c=\pm 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-b=\pm 1 \\ a-c=0 \end{cases}$, 解方程然后代入求解即可.

解: 根据题意得到 $\begin{cases} a-b=0 \\ a-c=\pm 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-b=\pm 1 \\ a-c=0 \end{cases}$,

$\therefore b-c=\pm 1$,

当 $\begin{cases} a-b=0 \\ a-c=\pm 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-b=\pm 1 \\ a-c=0 \end{cases}$ 时,
 $\begin{cases} b-c=\pm 1 \end{cases}$

$|a-b|+|a-c|+|b-c|=2$.

故选: C.

3. 方程 $||2x+1|-3|=5$ 的解是多少? 【请用绝对值的几何意义来解决这个问题】

【答案】 $x=\frac{7}{2}$ 或 $x=-\frac{9}{2}$.

【分析】根据绝对值的意义, 在数轴上到3距离为5的数是-2或8, 即 $|2x+1|=8$, 到-1的距离为8的数为7或-9, 即 $2x=7$ 或 $2x=-9$ 解方程即可.

解: $\because ||2x+1|-3|=5$,

$\therefore |2x+1|=8$,

$\therefore 2x=7$ 或 $2x=-9$

$$\therefore x = \frac{7}{2} \text{ 或 } x = -\frac{9}{2}.$$

4. 如图，数轴上有点 a, b, c 三点.

(1) $c - b$ < 0; $a + c$ > 0 (填 “<”, “>”, “=”);

(2) 求 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的值.

(3) 化简 $|c - b| - |c| + |a - 1| - b$.



【答案】 (1) <, >; (2) 0; (3) $a - 1$.

【分析】 解: (1) 从数轴可知: $-1 < c < 0 < 1 < a < b < 2$, 所以 $c - b < 0$, $a + c > 0$;

(2) 从数轴可知: $-1 < c < 0 < 1 < a < b < 2$, 所以 $abc < 0$,

$$\text{所以 } \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{-c} + \frac{abc}{-abc} = 1 + 1 + (-1) + (-1) = 0$$

(3) 从数轴可知: $-1 < c < 0 < 1 < a < b < 2$, 所以 $c - b < 0$, $a - 1 > 0$,

$$\text{所以 } |c - b| - |c| + |a - 1| - b = b - c + c + a - 1 - b = a - 1.$$

5. 分类讨论是一种重要的数学方法, 如在化简 $|a|$ 时, 可以这样分类: 当 $a > 0$ 时, $|a| = a$; 当 $a = 0$ 时, $|a| = 0$; 当 $a < 0$ 时, $|a| = -a$. 用这种方法解决下列问题:

(1) 当 $a = 5$ 时, 求 $\frac{a}{|a|}$ 的值.

(2) 当 $a = -2$ 时, 求 $\frac{a}{|a|}$ 的值.

(3) 若有理数 a 不等于零, 求 $\frac{a}{|a|}$ 的值.

(4) 若有理数 a, b 均不等于零, 试求 $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b}$ 的值.

【答案】 (1) 1; (2) -1; (3) 当 $a > 0$ 时, $\frac{a}{|a|} = 1$, 当 $a < 0$ 时, $\frac{a}{|a|} = -1$;

(4) 当 a, b 同为正数, $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} = 2$, 当 a, b 同为负数, $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} = -2$, 当 a, b 是异号, $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} = 0$.

【分析】 解: (1) 当 $a = 5$ 时, $\frac{a}{|a|} = 1$;

(2) 当 $a = -2$ 时, $\frac{a}{|a|} = -1$;

(3) 若有理数 a 不等于零, 当 $a > 0$ 时, $\frac{a}{|a|} = 1$, 当 $a < 0$ 时, $\frac{a}{|a|} = -1$;

(4) 若有理数 a 、 b 均不等于零, 当 a 、 b 同为正数, $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} = 2$,

当 a 、 b 同为负数, $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} = -2$,

当 a 、 b 是异号, $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} = 0$.

6. 如图, 数轴上有点 a , b , c 三点



(1) 用 “ $<$ ” 将 a , b , c 连接起来.

(2) $b - a$ $<$ 1 (填 “ $<$ ” “ $>$ ”, “ $=$ ”)

(3) 化简 $|c - b| - |c - a + 1| + |a - 1|$

(4) 用含 a , b 的式子表示下列的最小值:

① $|x - a| + |x - b|$ 的最小值为 $b - a$;

② $|x - a| + |x - b| + |x + 1|$ 的最小值为 $b + 1$;

③ $|x - a| + |x - b| + |x - c|$ 的最小值为 $b - c$.

【答案】 (1) $c < a < b$; (2) $<$; (3) b ; (4) ① $b - a$; ② $b + 1$; ③ $b - c$.

【分析】 解: (1) 根据数轴上的点得: $c < a < b$;

(2) 由题意得: $b - a < 1$;

(3) $|c - b| - |c - a + 1| + |a - 1|$

$$= b - c - (a - c - 1) + a - 1$$

$$= b - c - a + c + 1 + a - 1$$

$$= b;$$

(4) ① 当 x 在 a 和 b 之间时, $|x - a| + |x - b|$ 有最小值,

$$\therefore |x - a| + |x - b| \text{ 的最小值为: } x - a + b - x = b - a;$$

② 当 $x = a$ 时, $|x - a| + |x - b| + |x + 1| = 0 + b - a + a - (-1) = b + 1$ 为最小值;

③ 当 $x = a$ 时, $|x - a| + |x - b| + |x - c| = 0 + b - a + a - c = b - c$ 为最小值.

(具体分析参考课程例 9)

7. 化简并填空:

(1) 当 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 时, 化简 $|3x + 1| - 2|x - 1|$;

(2) 当 $|x|+|x+4|$ 最小时, $|3x+1|-2|x-1|$ 的最大值为1.

【答案】(1) $5x-1$; (2) 1.

【分析】(1) 解: $\because -\frac{1}{3} \leq x \leq 1, \therefore -1 \leq 3x \leq 3, \therefore 3x+1 \geq 0, x-1 \leq 0,$

$\therefore$ 原式 $=3x+1+2(x-1)=5x-1$;

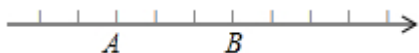
(2) $\because$ 当 $|x|+|x+4|$ 最小时, $-4 \leq x \leq 0$,

①当 $-4 \leq x < -\frac{1}{3}$ 时, $|3x+1|-2|x-1| = -(3x+1)+2(x-1) = -x-3$, 此时最大值=1,

②当 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ 时, $|3x+1|-2|x-1|=3x+1+2(x-1)=5x-1$, 此时最大值=-1,

综上所述: $|3x+1|-2|x-1|$ 的最大值为: 1.

8. 数轴上两点间的距离等于这两点所对应的数的差的绝对值. 例: 如图所示, 点 A 、 B 在数轴上分别对应的数为 a 、 b , 则 A 、 B 两点间的距离表示为 $|AB|=|a-b|$.



根据以上知识解题:

(1) 若数轴上两点 A 、 B 表示的数为 x 、 -1 ,

① A 、 B 之间的距离可用含 x 的式子表示为 $|x+1|$;

②若该两点之间的距离为2, 那么 x 值为 -3 或 1 .

(2) $|x+1|+|x-2|$ 的最小值为 3, 此时 x 的取值是 $-1 \leq x \leq 2$;

(3) 已知 $(|x+1|+|x-2|)(|y-3|+|y+2|)=15$, 求 $x-2y$ 的最大值 6 和最小值 -7.

【答案】(1) ① $|x+1|$; ② -3 或 1 ; (2) 3, $-1 \leq x \leq 2$; (3) 6, -7

【分析】解: (1) ① A 、 B 之间的距离可用含 x 的式子表示为 $|x+1|$;

②依题意有 $|x+1|=2$, $x+1=-2$ 或 $x+1=2$, 解得 $x=-3$ 或 $x=1$.

故 x 值为 -3 或 1 .

(2) $|x+1|+|x-2|$ 的最小值为3, 此时 x 的取值是 $-1 \leq x \leq 2$;

(3) $\because (|x+1|+|x-2|)(|y-3|+|y+2|)=15$,

$\therefore -1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 3$ (具体分析过程参考课程例11)

$\therefore x - 2y$ 的最大值为 $2 - 2 \times (-2) = 6$, 最小值为 $-1 - 2 \times 3 = -7$.

故 $x - 2y$ 的最大值 6, 最小值 -7.

故答案为: $|x+1|$; -3 或 1; 3, $-1 \leq x \leq 2$; 6, -7.

L7 拓展篇第二讲—有理数运算

参考答案与试题解析

1. 计算题.

$$(1) \frac{5+6}{5 \times 6} - \frac{6+7}{6 \times 7} + \frac{7+8}{7 \times 8} - \frac{8+9}{8 \times 9} + \frac{9+10}{9 \times 10} - \frac{10+11}{10 \times 11};$$

$$(2) 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{12} + 7\frac{1}{20} + 9\frac{1}{30} + 11\frac{1}{42} + 13\frac{1}{56} + 15\frac{1}{72} + 17\frac{1}{90};$$

$$(3) \left(\frac{51}{15} + \frac{59}{37} + \frac{73}{95}\right) \times \left(\frac{59}{37} + \frac{73}{95} + \frac{15}{51}\right) - \left(\frac{51}{15} + \frac{59}{37} + \frac{73}{95} + \frac{15}{51}\right) \times \left(\frac{59}{37} + \frac{73}{95}\right);$$

$$(4) \left(\frac{202020}{131313} + \frac{200200}{130130} + \frac{20002000}{13001300}\right) \div \frac{20}{13} \times \frac{2020}{1313}.$$

【答案】 (1) $\frac{6}{55}$; (2) $81\frac{9}{10}$; (3) 1; (4) $\frac{60}{13}$.

【分析】 解: (1) 原式 $= \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{10} = \frac{1}{5} -$

$$\frac{1}{11} = \frac{6}{55}$$

(2) 原式 $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots +$

$$\frac{1}{90} = \frac{9(1+17)}{2} + \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{9 \times 10}\right) = 81 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = 81 + \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 81\frac{9}{10}$$

(3) 令 $\frac{51}{15} + \frac{59}{37} + \frac{73}{95} = a$, $\frac{59}{37} + \frac{73}{95} = b$, 则

$$\text{原式} = a \times b + a \times \frac{15}{51} - a \times b - b \times \frac{15}{51} = \frac{15}{51}(a - b) = \frac{15}{51} \times \frac{51}{15} = 1$$

(4) 原式 $= \left(\frac{10101 \times 20}{10101 \times 13} + \frac{10010 \times 20}{10010 \times 13} + \frac{1000100 \times 20}{1000100 \times 13}\right) \div \frac{20}{13} \times \frac{101 \times 20}{101 \times 13} = \frac{20}{13} \times 3 \div \frac{20}{13} \times$

$$\frac{20}{13} = \frac{20}{13} \times 3 \times \frac{13}{20} \times \frac{20}{13} = \frac{60}{13}.$$

2. 小明在计算有规律的算式 $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \dots + 19 - 20$ 时, 不小心把一个运算符号写错了 (“+” 错写成 “-” 或 “-” 错写成 “+”), 结果算成了 -36, 则原式从左到右数, 写错的运算符号是 ()

A. 第 5 个 B. 第 8 个 C. 第 10 个 D. 第 12 个

【答案】 D.

【分析】 解:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \dots + 19 - 20 = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (19 - 20) = -1$$

$$\times 10 = -10,$$

∴运算结果 -36 比 -10 小,

∴“+”错写成“-”, 设写错符号的数是 a ,

$$\therefore -1 \times 9 - a - (a+1) = -36,$$

解得 $a=13$,

∴写错的运算符号是第 12 个,

故选: D.

3. 读一读:

式子“ $1+2+3+4+\cdots+100$ ”表示从 1 开始的 100 个连续自然数的和, 由于式子比较长, 书写不方便, 为了简便起见, 我们将其表示为 $\sum_{n=1}^{100} n$. 这里“ Σ ”是求和符号.

通过以上材料的阅读, 解决问题:

(1) 用求和符号表示式子 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \cdots + 99 \times 100 + 100 \times 101$;

(2) 计算 $\sum_{n=1}^{2012} \frac{1}{n(n+1)}$.

【答案】 (1) $\sum_{n=1}^{100} n(n+1)$; (2) $\frac{2012}{2013}$.

【分析】 解: (1) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \cdots + 99 \times 100 + 100 \times 101 = \sum_{n=1}^{100} n(n+1)$.

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{2012} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{2012 \times 2013} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} = 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013}.$$

4. 计算 $\frac{94 \times 99 + 95 \times 98 + 96 \times 97 + 97 \times 96}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \times 99$ 的整数部分为 ()

A. 96

B. 97

C. 98

D. 99

【答案】 B

【分析】 原式可化简为:

$$\begin{aligned} & \frac{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97 - 94 - 95 - 96 - 97}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \times 99 \\ &= \left(1 - \frac{94 + 95 + 96 + 97}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \right) \times 99 \\ &= 99 - \frac{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97 - 94 + 96 + 2 \times 97}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 99 - \frac{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97 + 2 + 2 \times 97}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \\
&= 99 - \frac{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97 + 2 \times 98}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \\
&= 99 - 1 - \frac{2 \times 98}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \\
&= 98 - \frac{2 \times 98}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} \\
&\quad \because 0 < \frac{2 \times 98}{94 \times 100 + 95 \times 99 + 96 \times 98 + 97 \times 97} < 1
\end{aligned}$$

$\therefore$ 原式整数部分为 97.

5. 证明: $\frac{2}{11} < \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{120} < \frac{1}{5}$.

【答案】见分析.

【分析】证明: 原式 $= (\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{109}) + (\frac{1}{110} + \cdots + \frac{1}{120}) > 10 \times \frac{1}{110} + 11 \times \frac{1}{121} = \frac{1}{11} +$

$$\frac{1}{11} = \frac{2}{11},$$

$$\text{原式} = (\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{109}) + (\frac{1}{110} + \cdots + \frac{1}{120}) < 10 \times \frac{1}{100} + 11 \times \frac{1}{110} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5},$$

$$\text{故 } \frac{2}{11} < \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{120} < \frac{1}{5}.$$

L7 拓展篇第三讲——一元一次方程

参考答案与试题解析

1. 已知 x, y 为有理数, 定义一种新的运算 $\triangle$: $x \triangle y = 2xy - x + 1$, 若关于 x 的方程 $x \triangle a = 19$ 有正整数解, 且 a 为正整数. 求符合条件的所有的 a 的值的积.

【答案】10.

【分析】解: $\because x \triangle y = 2xy - x + 1, x \triangle a = 19,$

$$\therefore 2ax - x + 1 = 19, \text{ 可得: } (2a - 1)x = 18$$

$\because$ 关于 x 的方程 $x \triangle a = 19$ 有正整数解, 且 a 为正整数.

$\therefore$ 当 $a=1$ 时, $x=18$; 当 $a=2$ 时, $x=6$, 当 $a=5$ 时, $x=2$;

$\therefore$ 符合条件的所有 a 的值的积为: $1 \times 2 \times 5 = 10$.

2. 已知 k 为非负整数, 且关于 x 的方程 $2(x-2) = \frac{kx}{3} + 4$ 的解为正整数, 求 k 有可能取值的和.

【答案】14.

【分析】解方程 $2(x-2) = \frac{kx}{3} + 4$ 可得: $(6-k)x = 24,$

当 $k=6$ 时, 无解;

当 $k \neq 6$ 时, $x = \frac{24}{6-k};$

$\because$ 该方程的解为正整数, k 为非负整数

$\therefore$ 满足条件的 k 为: 0, 2, 3, 4, 5

$\therefore 0 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

3. 已知关于 x 的方程 $2ax = (a+1)x + 3$, 若方程无解, 则整数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$; 若方程的解为正整数, 则整数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】1; 2 或 4.

【分析】解关于 x 的方程 $2ax = (a+1)x + 3$ 可得: $(a-1)x = 3;$

要使方程无解, 则 $a-1=0$, 即 $a=1$;

要使方程的解为正整数, 则 $a-1=1$ 或 $a-1=3$, 即 $a=2$ 或 4 .

4. 如果关于 x 的方程 $(m+2)x = 8$ 无解, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m > -2$ B. $m = -2$ C. $m \neq -2$ D. 任意实数

【答案】B

【分析】由题意， $m + 2 = 0$.

5. 关于 x 的方程 $2a(x - 1) = (5 - a)x + 3b$ 有无穷多个解，求 $a - b$.

【答案】 $\frac{25}{9}$.

【分析】方程整理得： $(3a - 5)x = 2a + 3b$,

$\because$ 方程有无穷多个解，

$\therefore 3a - 5 = 0, 2a + 3b = 0$,

解得： $a = \frac{5}{3}, b = -\frac{10}{9}$,

故 $a - b = \frac{25}{9}$.

6. 如果 a, b 为定值，关于 x 的一次方程 $\frac{kx+2a}{2} - \frac{x-bk}{6} = \frac{1}{2}$ ，无论 k 为何值时，1 总是它的解，求 $6a+b$.

【答案】1.

【分析】将 $x=1$ 代入原方程得 $\frac{k+2a}{2} - \frac{1-bk}{6} = \frac{1}{2}$ ，整理可得： $(b+3)k = 4 - 6a$,

由题意： $b+3=0, 4-6a=0$ ，解得： $a=\frac{2}{3}, b=-3$ ，故 $6a+b=1$.

7. 解下列关于 x 的方程.

(1) $4x + b = ax - 8, (a \neq 4)$;

(2) $mx - 1 = nx$;

(3) $\frac{1}{3}m(x - n) = \frac{1}{4}(x + 2m)$.

【答案】(1) $x = \frac{b+8}{a-4}$; (2) 当 $m \neq n$ 时，原方程有唯一解： $x = \frac{1}{m-n}$ ，当 $m = n$ 时，原方程无解；(3) 当 $m \neq \frac{3}{4}$ 时，原方程有唯一解： $x = \frac{4mn+6m}{4m-3}$ ，当 $m = \frac{3}{4}, n = -\frac{3}{2}$ 时，原方程有无数个解，当 $m = \frac{3}{4}, n \neq -\frac{3}{2}$ 时，原方程无解。

【分析】(1) 整理原方程可得： $(a - 4)x = b + 8$ ，又 $a \neq 4$ ，则 $x = \frac{b+8}{a-4}$

(2) 整理原方程可得： $(m - n)x = 1$,

当 $m \neq n$ 时，方程有唯一解： $x = \frac{1}{m-n}$,

当 $m = n$ 时，原方程无解；

(3) 整理原方程可得: $(4m - 3)x = 4mn + 6m$

当 $m \neq \frac{3}{4}$ 时, 原方程有唯一解: $x = \frac{4mn+6m}{4m-3}$,

当 $m = \frac{3}{4}$, $n = -\frac{3}{2}$ 时, 原方程有无数个解,

当 $m = \frac{3}{4}$, $n \neq -\frac{3}{2}$ 时, 原方程无解.

8. 不论 x 取何值, 等式 $2ax + b = 4x - 3$ 总成立, 求 $a + b$ 的值.

【答案】 -1.

【分析】 由不论 x 取何值, 等式 $2ax + b = 4x - 3$ 恒成立, 故把 $x = 0, x = 1$ 代入等式可得: $a = 2, b = -3$.

L7 拓展篇第四讲—绝对值方程

参考答案与试题解析

1. 方程 $||2x + 1| - 3| = 5$ 的解是多少?

【答案】 $x = \frac{7}{2}$ 或 $x = -\frac{9}{2}$.

【分析】原方程等价于 $|2x + 1| - 3 = 5$ 或 $|2x + 1| - 3 = -5$,

$|2x + 1| = 8$ 或 $|2x + 1| = -2$ (无解).

当 $|2x + 1| = 8$ 时, 解得 $x = \frac{7}{2}$ 或 $x = -\frac{9}{2}$.

2. $|||x - 1| - 1| - 1| = 0$ 是一个含有 4 重绝对值符号的方程, 则 ()

A. 0, 2, 4 全是根

B. 0, 2, 4 全不是根

C. 0, 2, 4 不全是根

D. 0, 2, 4 之外没有根

【答案】A

【分析】原方程等价于 $|||x - 1| - 1| - 1| = 0$, 即 $||x - 1| - 1| = 1 \pm 1$,

即

$||x - 1| - 1| = 2$ 或 $||x - 1| - 1| = 0$.

当 $||x - 1| - 1| = 2$ 时, $|x - 1| = 1 \pm 2$, 即 $|x - 1| = 3$ 或 $|x - 1| = -1$ (无解).

当 $|x - 1| = 3$ 时, $x - 1 = \pm 3$, 解得 $x = 4$ 或 $x = -2$.

当 $||x - 1| - 1| = 0$ 时, $|x - 1| = 1$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 2$.

故原方程的解为 $x = 0$ 或 $x = \pm 2$ 或 $x = 4$.

3. 解方程

(1) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 6$;

(2) $|x + 3| + |x - 3| = \frac{9}{2}|x| + 5$.

【答案】(1) $x = 0$ 或 $x = 4$. (2) $x = \pm \frac{2}{9}$.

【分析】(1) 根据绝对值的意义去绝对值, 则需要对 x 的取值进行分类讨论:

当 $x \leq 1$ 时, $1 - x + 2 - x + 3 - x = 6$, 解得: $x = 0$.

当 $1 < x \leq 2$ 时, $x - 1 + 2 - x + 3 - x = 6$, 解得: $x = -2$ (舍去).

当 $2 < x \leq 3$ 时, $x - 1 + x - 2 + 3 - x = 6$, 解得: $x = 6$ (舍去).

当 $x > 3$ 时, $x - 1 + x - 2 + x - 3 = 6$, 解得: $x = 4$.

综上, 方程的解为 $x = 0$ 或 $x = 4$.

(2) 当 $x \leq -3$ 时, $-3 - x + 3 - x = -\frac{9}{2}x + 5$, 解得 $x = 2$ (舍去).

当 $-3 < x \leq 0$ 时, $x + 3 + 3 - x = -\frac{9}{2}x + 5$, 解得 $x = -\frac{2}{9}$.

当 $0 < x \leq 3$ 时, $x + 3 + 3 - x = \frac{9}{2}x + 5$, 解得 $x = \frac{2}{9}$.

当 $x > 3$ 时, $x + 3 + x - 3 = \frac{9}{2}x + 5$, 解得 $x = -2$ (舍去).

综上, 方程的解为 $x = \pm \frac{2}{9}$.

4. 已知关于 x 的绝对值方程 $2||x - 1| - 2| = a$ 有三个不相等的解, 求 a 的值.

【答案】4.

【分析】解原方程后可得 $x = 1 \pm (2 \pm \frac{a}{2})$,

即 $x = 3 + \frac{a}{2}$ 或 $x = 3 - \frac{a}{2}$ 或 $x = -1 - \frac{a}{2}$ 或 $x = -1 + \frac{a}{2}$.

又方程有三个不相等的解, 且 $a \neq 0$ (若 $a = 0$, 原方程只有 2 个不相等的解, 不符题意).

观察可知, $3 + \frac{a}{2} \neq 3 - \frac{a}{2}$ 且 $3 + \frac{a}{2} \neq -1 + \frac{a}{2}$, $-1 - \frac{a}{2} \neq -1 + \frac{a}{2}$ 且 $-1 - \frac{a}{2} \neq 3 - \frac{a}{2}$.

故要满足题意, 只可能为 $3 + \frac{a}{2} = -1 - \frac{a}{2}$ 或 $3 - \frac{a}{2} = -1 + \frac{a}{2}$,

解得: $a = -4$ 或 $a = 4$, 又 $a > 0$, 故 $a = 4$.

5. 若 x_0 是关于 x 的一元一次方程 $x - \frac{x-2a}{4} = 2a + 3$ 的解, y_0 是关于 y 的方程

$|y + 1| - 3 = 14$ 的一个解, 且 x_0 、 y_0 满足 $x_0 + y_0 = 424$, 求 a 的值.

【答案】 a 的值为 202 或 219.

【分析】由方程 $x - \frac{x-2a}{4} = 2a + 3$, 解得 $x = 2a + 4$.

由方程 $|y + 1| - 3 = 14$, 解得 $y = 16$ 或 $y = -18$.

由题意 $2a + 4 + 16 = 424$ 或 $2a + 4 - 18 = 424$, 解得 $a = 202$ 或 $a = 219$.

6. 若 $-199 < x < 199$, 则满足 x 的方程 $||x| - 100| = m$ 的整数 m 的值共有 ()

A. 100 个 B. 102 个 C. 101 个 D. 103 个

【答案】C.

【分析】 $\because -199 < x < 199, \therefore 0 \leq |x| < 199, \therefore 0 \leq ||x| - 100| \leq 100,$

$\because m$ 是整数, $\therefore m$ 可以取从 0 到 100 的所有整数, 共 101 个.

7. (1) 解方程 $\frac{x}{2} + |x - 1| = 5$;

(2) 关于 x 的方程 $|x + 3| - 1 = -2m + 3$ 只有 1 个解, 求方程的解及 m 的值.

【答案】(1) $x = -8$ 或 $x = 4$; (2) $m = 2, x = -3$.

【分析】(1) 原方程等价于 $|x - 1| = 5 - \frac{x}{2}$, 则必有 $5 - \frac{x}{2} \geq 0$, 即 $x \leq 10$.

当 $1 < x \leq 10$ 时, $x - 1 = 5 - \frac{x}{2}$, 可得 $x = 4$.

当 $x < 1$ 时, $1 - x = 5 - \frac{x}{2}$, 可得 $x = -8$.

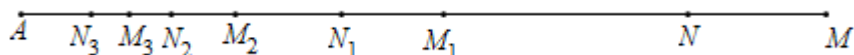
故原方程的解为 $x = 4$ 或 $x = -8$.

(2) 原方程等价于 $|x + 3| = 4 - 2m$, 考虑绝对值的几何意义, 可知 x 在数轴上代表的点即为到 -3 的距离为 $4 - 2m$ 的点, 又由已知条件, 该点唯一 (方程只有一个解), 故这个点只能是 -3 本身, 即到 -3 的距离 $4 - 2m = 0$, 即 $m = 2$. (到 -3 的距离不为 0 的点必有 2 个, 即方程有 2 个解). 则 $x = -3, m = 2$.

L7 拓展篇第五讲一线与角

参考答案与试题解析

1. 如图，点 M 在线段 AN 的延长线上，且线段 $MN=20$ ，第一次操作：分别取线段 AM 和 AN 的中点 M_1, N_1 ；第二次操作：分别取线段 AM_1 和 AN_1 的中点 M_2, N_2 ；第三次操作：分别取线段 AM_2 和 AN_2 的中点 M_3, N_3 ；……连续这样操作 10 次，则每次的两个中点所形成的所有线段之和 $M_1N_1+M_2N_2+\cdots+M_{10}N_{10}=(\quad)$



- A. $20 - \frac{10}{2^9}$ B. $20 + \frac{10}{2^9}$ C. $20 - \frac{10}{2^{10}}$ D. $20 + \frac{10}{2^{10}}$

【答案】 A

【分析】 $\because$ 线段 $MN=20$ ， M_1, N_1 为线段 AM 和 AN 的中点

$$\therefore M_1N_1 = AM_1 - AN_1 = \frac{1}{2}(AM - AN) = \frac{1}{2}MN = 10.$$

$$\text{同理, } M_2N_2 = \frac{1}{2}M_1N_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2^2}MN = 5.$$

$$\text{发现规律: } M_nN_n = \frac{1}{2^n}MN = \frac{1}{2^n} \times 20$$

$$\begin{aligned} \text{则 } M_1N_1 + M_2N_2 + \cdots + M_{10}N_{10} &= \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2^2} \times 20 + \cdots + \frac{1}{2^{10}} \times 20 = 20 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} \right) \\ &= 20 \times \frac{(2^{10}-1)}{2^{10}} = 20 - \frac{10}{2^9}. \end{aligned}$$

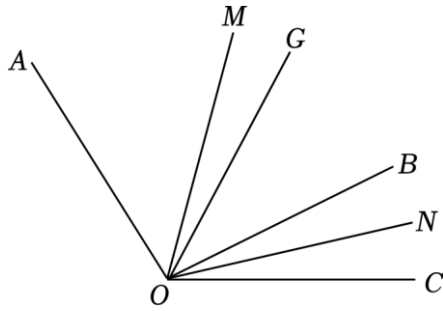
2. 如图，射线 OG 是 $\angle AOC$ 的角平分线，射线 OM 是 $\angle AOB$ 的角平分线，射线 ON 是 $\angle BOC$ 的角平分线，则下列结论成立的有 $(\quad)$ 个.

① $\angle MON = \angle COG$;

② $\angle MOG = \frac{1}{2}(\angle AOG - \angle BOG)$;

③ $\angle GON = \frac{1}{2}(\angle COG + \angle BOG)$;

④ $\angle MON = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOG)$;



- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】D

【分析】由题意： $\angle AOG = \angle COG = \frac{1}{2} \angle AOC$ ， $\angle AOM = \angle MOB = \frac{1}{2} \angle AOB$ ， $\angle BON = \angle NOC = \frac{1}{2} \angle COB$

$$\textcircled{1} \angle MON = \angle MOB + \angle BON = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle COG;$$

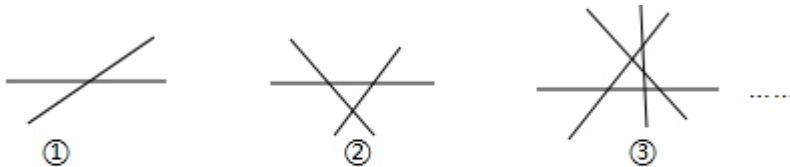
$$\begin{aligned} \textcircled{2} \angle MOG &= \angle AOG - \angle AOM = \angle AOG - \angle BOM \\ &= \angle AOG - (\angle BOG + \angle MOG) = \angle AOG - \angle BOG - \angle MOG, \\ \text{即 } \angle MOG &= \frac{1}{2}(\angle AOG - \angle BOG); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \angle GON &= \angle COG - \angle CON = \angle COG - \angle BON \\ &= \angle COG - (\angle GON - \angle BOG) = \angle COG - \angle GON + \angle BOG, \\ \text{即 } \angle GON &= \frac{1}{2}(\angle COG + \angle BOG); \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{由} \textcircled{1} \text{得 } \angle MON = \frac{1}{2} \angle AOC \neq \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOG);$$

综上， $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ 正确。

3. 观察如图，并阅读图形下面的相关文字：



①
两条直线相交，
最多有1个交点

②
三条直线相交，
最多有3个交点

③
四条直线相交
最多有6个交点

像这样，20 条直线相交，交点最多的个数是（ ）

- A. 100 个 B. 135 个 C. 190 个 D. 200 个

【答案】C

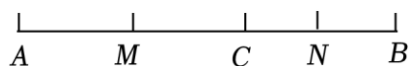
【分析】交点个数最多有 $1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{1}{2} \times 19 \times (19 + 1) = 190$.

4. 如图，点 C 在线段 AB 上，点 M 、 N 分别是 AC 、 BC 的中点.

(1) 若 $AC=10\text{cm}$ ， $CB=8\text{cm}$ ，求线段 MN 的长；

(2) 若 C 为线段 AB 上任一点，满足 $AC+CB=a$ ，其它条件不变，你能猜想 MN 的长度吗？写出你的结论并说明理由；

(3) 若 C 为直线 AB 上线段 AB 之外的任一点，且 $AC=m$ ， $CB=n$ ，则线段 MN 的长为 _____.

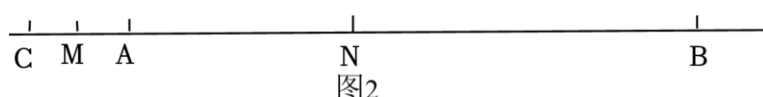


【答案】(1) 9cm ；(2) $MN=\frac{1}{2}a$ ；(3) $\frac{1}{2}(n-m)$ 或 $\frac{1}{2}(m-n)$.

【分析】(1)(2) 略；

(3) 分两种情况讨论：①当 C 在 A 的左侧时，②当 C 在 B 的右侧时，分别画出图形后求解.

①当 C 在 A 的左侧时，如图 2，

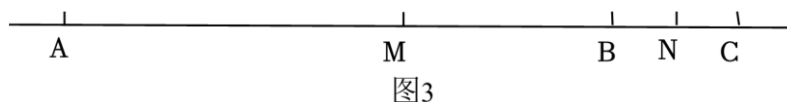


$\because$ 点 M ， N 分别是 AC ， BC 的中点，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}AC, \quad CN = \frac{1}{2}CB$$

$$\therefore MN = CN - CM = \frac{1}{2}(CB - CA) = \frac{1}{2}(n - m),$$

②当 C 在 B 的右侧时，如图 3，



同理可得 $MN = \frac{1}{2}(m - n)$.

5. 如图，已知数轴上，点 O 为原点，点 A 对应的数为 9 ，点 B 对应的数为 b ，点 C 在点 B 右侧，长度为 2 个单位的线段 BC 在数轴上移动.



(1) 当 $b=5$ 时，试求线段 AC 的长；

(2) 当线段 BC 在数轴上沿射线 AO 方向移动的过程中，若存在 $AC - OB = \frac{1}{2}AB$ ，求此时满足条件的 b 值.

(3) 当线段 BC 在数轴上移动时, 满足关系式 $|AC - OB| = |AB - OC|$, 则此时的 b 的取值范围是 _____.

【答案】 (1) 2; (2) $b = -5$ 或 $\frac{5}{3}$; (3) $0 \leq b \leq 7$.

【分析】 (1) 略;

(2) 分 $b > 0$ 和 $b < 0$ 分别求值;

由题意可得: $AB = 9 - b$, $AC = 9 - (b + 2) = 7 - b$,

当 $b > 0$ 时, 由 $AC - OB = \frac{1}{2}AB$,

$$\therefore 7 - b - b = \frac{1}{2}(9 - b), \text{ 解得 } b = \frac{5}{3};$$

当 $b < 0$ 时, 由 $AC - OB = \frac{1}{2}AB$,

$$\therefore 7 - b + b = \frac{1}{2}(9 - b), \text{ 解得 } b = -5;$$

$$\therefore b = -5 \text{ 或 } \frac{5}{3};$$

(3) 由于需要分别求出 AC 、 OB 、 AB 、 OC 线段长, 故需对 B 、 C 位置进行分类讨论, 对 A 在线段 BC 左边, A 在线段 BC 之间, 线段 BC 在线段 OA 之间, O 在线段 BC 之间, O 在线段 BC 右边 5 种情况进行分类讨论。

当 A 在线段 BC 左边时, 即 $b \geq 9$ 时, 可得: $AC = b - 7$, $OB = b$, $AB = b - 9$, $OC = b + 2$, 由题意 $|b - 7 - b| = |b - 9 - b - 2|$, 无解;

当 A 在线段 BC 之间时, 即 $7 \leq b < 9$ 时, 同理可得: $7 = |7 - 2b|$, 解得: $b = 0$ (舍), $b = 7$;

当线段 BC 在线段 OA 之间时, 即 $0 \leq b < 7$ 时, 同理可得: $|7 - 2b| = |7 - 2b|$, 恒成立;

当 O 在线段 BC 之间时, 即 $-2 \leq b < 0$ 时, 同理可得: $7 = |7 - 2b|$, 解得: $b = 0$ (舍), $b = 7$ (舍);

当 O 在线段 BC 右边时, 即 $b < -2$ 时, 同理可得: $|7 - b + b| = |9 - b + b + 2|$, 无解;

综上, $0 \leq b \leq 7$.

6. 学习了角的度量单位后, 好学的小明在网上搜索发现了如图①所示的量角演示器, 他将一副三角尺和量角演示器按如图②所示位置摆放, 请你和小明一起

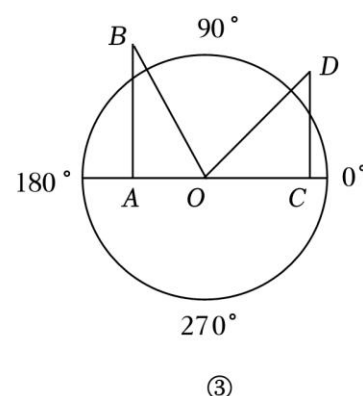
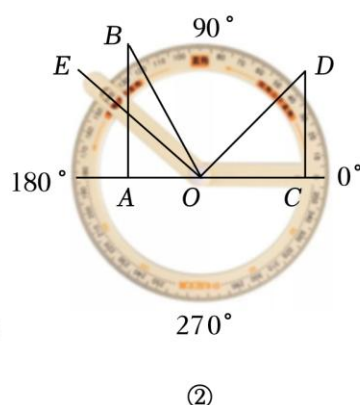
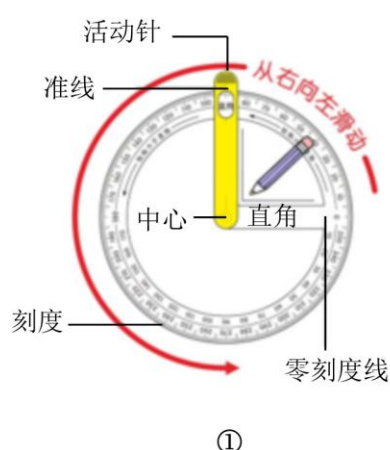
探索以下问题：

(1) 当活动针 OE 对应的读数为 140° 时， $\angle EOD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；当活动针 OE 平分 $\angle BOD$ 时， OE 对应的读数为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

(2) 将三角尺 AOB 绕着点 O 以每秒 4° 的速度按顺时针方向旋转，同时，三角尺 COD 绕着点 O 以每秒 2° 的速度按顺时针方向旋转，当三角尺 AOB 旋转一周时，两把三角尺同时停止转动。

①若在旋转过程中，活动针 OE 始终平分 $\angle BOD$ 。当 $\angle BOD = 60^\circ$ 时，求旋转所用的时间和活动针 OE 对应的读数；

②若两把三角尺开始旋转时，活动针 OE 同时从 OB 的位置绕着点 O 以每秒 7° 的速度按顺时针方向旋转，当 OE 与 OD 重合后，活动针 OE 立即以同样的速度逆时针方向旋转。当 OE 与 OB 重合后停止旋转，求活动针 OE 停止时对应的读数，请直接写出答案（结果保留整数）。



【答案】 (1) 95, 82.5;

(2) ①当 $\angle BOD = 60^\circ$ 时，当旋转 7.5 秒时，活动针 OE 对应的读数是 60° ；当旋转 67.5 秒时，活动针 OE 对应的读数是 240° 。② 44° 。

【分析】 (1) 略；

(2) ①需要分两种情况，当 OB 追上 OD 之前，当 OB 追上 OD 之后，分别求解；假设 t 秒后 OB 追上 OD ，则由题意可知 $120^\circ - 4t = 45^\circ - 2t$ ，即 $t = 37.5$ (秒) 时， OB 追上 OD 。当 $t \leq 37.5$ 时，由题意： $120^\circ - 4t - (45^\circ - 2t) = 60^\circ$ ，解得： $t = 7.5$ ，此时 OE 对应读数为 60° ；当 $t > 37.5$ 时，由题意： $-(120^\circ - 4t) - [-(45^\circ - 2t)] = 60^\circ$ ，解得： $t = 67.5$ ，此时 OE

对应读数为 240° ；

②先是 OE 与 OD 的追及问题，后为 OE 与 OB 的相遇问题。

设 OE 运动的时间为 m 秒，当 OE 与 OD 重合时，

由题意， $120^\circ - 7m = 45^\circ - 2m$ ，

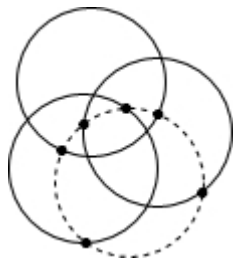
解得 $m=15$ ，此时 OB 读数为 60° ， OE 读数为 15° ，

当活动针 OE 立即以同样的速度逆时针方向旋转，与 OB 重合时，

由题意， $60^\circ - 4m = 15^\circ + 7m$ ，解得： $m = \frac{45}{11}$ 。

此时 OE 读数为 $15^\circ + 7m = 15^\circ + 7^\circ \times \frac{45}{11} \approx 44^\circ$

7. 平面上 5 个圆最多能把平面分成多少个部分？



【答案】 22.

【分析】 一个圆可以把平面分成两部分，而两个圆相交，交点最多有两个，每多一个交点会多出一个部分，所以此后增加的平面部分数依次是 2，4，6，8，…；则 5 个圆最多能把平面分成 $2+2+4+6+8=22$ 个部分.

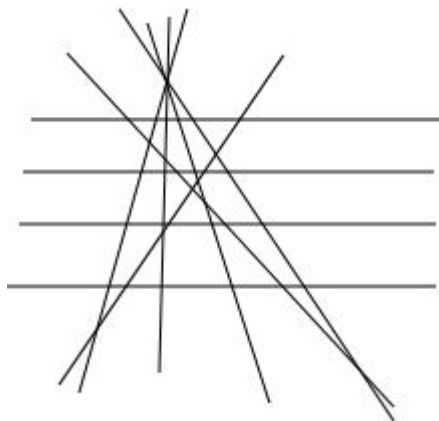
L7 拓展篇第六讲—平行线

参考答案与试题解析

1. 平面上有 10 条直线，其中 4 条直线交于一点，另有 4 条直线互相平行，这 10 条直线最多有几个交点？

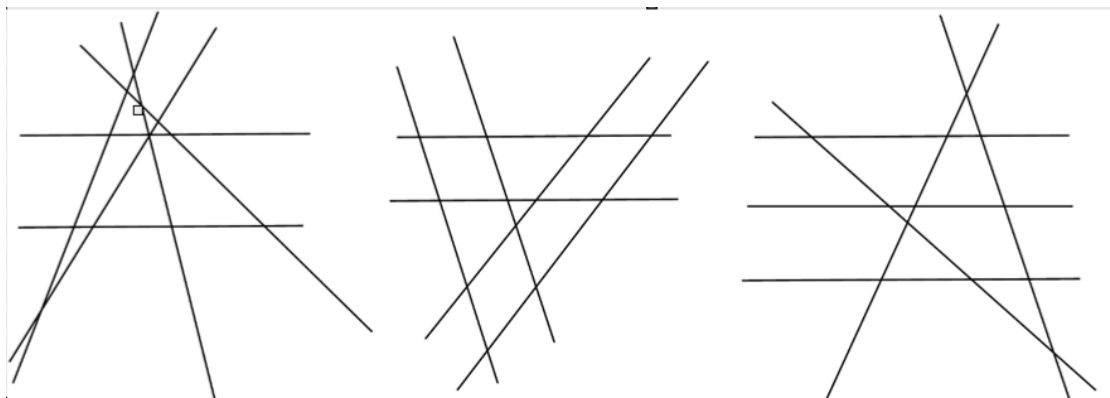
【答案】34.

【分析】如图，交点最多可由以下组成：①4 条直线相交于一点（一个交点）；②4 条平行线与上面 4 条相交于一点的直线分别都相交（ $4 \times 4 = 16$ 个交点）；③剩下 2 条直线相交且各自与其他 8 条直线分别都相交（ $1 + 8 + 8 = 17$ 个交点），可得最多共有 $1 + 16 + 17 = 34$ 个交点.



2. (1) 平面上有 6 条直线，共有 12 个不同的交点，画出它们可能的位置关系（画三种图形）.
- (2) 平面上 n 条直线中每条恰与另外的 1999 条相交，求 n 的所有可能值.
- (3) ①已知平面内有 4 条直线 a, b, c 和 d ，直线 a, b 和 c 相交于一点，直线 b, c 和 d 也相交于一点. 试确定这 4 条直线共有多少个交点？并说明你的理由.
- ②作第 5 条直线 e 与①中的直线 d 平行，说明：以这 5 条直线的交点为端点的线段有多少条？

【答案】(1)



(2) $n=3998$ 或 2000 ; (3) ①1; ②6.

【分析】(1) 可分 4 条直线两两都相交、3 条直线两两都相交讨论;

(2) 对 n 条直线根据平行关系分 k 类, 可得各类的数为 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 $a_5 \dots a_k$ 条, ($a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\dots+a_k=n$) 同类的直线不相交, 不同类的均相交, 第 k 类的线与其他类的 $n-a_k$ 条都相交, 故由题设条件得到 $n-a_1=n-a_2=\dots=n-a_k=1999$, 于是 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=\dots=a_k$, $1999=n-a=(k-1)a$, 因为 1999 是素数, 只有两组解 (2, 1999) 和 (2000, 1), 即可得 n 值;

(3) ①设直线 a, b, c 的交点为 P , 直线 b, c, d 的交点为 Q , 这意味着点 P 和 Q 都是直线 b 和 c 的交点, 由于两条不同的直线至多有一个交点, 因此点 P 和 Q 必是同一个点, 即 4 条直线 a, b, c 和 d 相交于同一个点. 因此这 4 条直线 a, b, c 和 d 只有 1 个交点 (不妨记为点 O);

②因为作的第 5 条直线 e 与①中的直线 d 平行, 所以直线 e 与直线 d 没有公共点, 因此, 直线 e 不过点 O , 而直线 a, b, c 都与直线 d 相交于点 O , 所以, 直线 a, b, c 与直线 e 都相交, 可知共有 4 个交点, 4 个点可组成 6 条线段. (具体可参考《小学数学 一步到位》3-6 中数线段问题)

3. ①如下图 1, 已知 $AB \parallel CD$, AB 和 CD 都不经过点 E , 探索 $\angle E$ 与 $\angle A$, $\angle C$ 的数量关系.

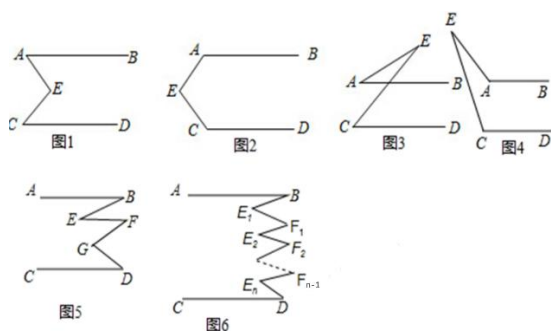
②在图 2 中, 若 $\angle A=110^\circ$, $\angle C=130^\circ$, 则 $\angle E$ 的度数为_____;

在图 3 中, 若 $\angle A=20^\circ$, $\angle C=50^\circ$, 则 $\angle E$ 的度数为_____.

③图 4 中, 探索 $\angle E$ 与 $\angle A$, $\angle C$ 的数量关系, 并说明理由.

④ (1) 如图 5, $\angle B$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 之间有什么关系? (直接写出结论)

(2) 如图 6, 你可以得到什么结论? (直接写出结论)



【答案】① $\angle AEC = \angle A + \angle C$;

② 120° ; 30° .

③ $\angle E = \angle A - \angle C$.

④ $\angle E + \angle G = \angle B + \angle F + \angle D$; $\angle E_1 + \angle E_2 + \dots + \angle E_n = \angle F_1 + \angle F_2 + \dots + \angle F_{n-1} + \angle B + \angle D$.

【分析】①略;

②过点 E 做直线 AB 的平行线后求解;

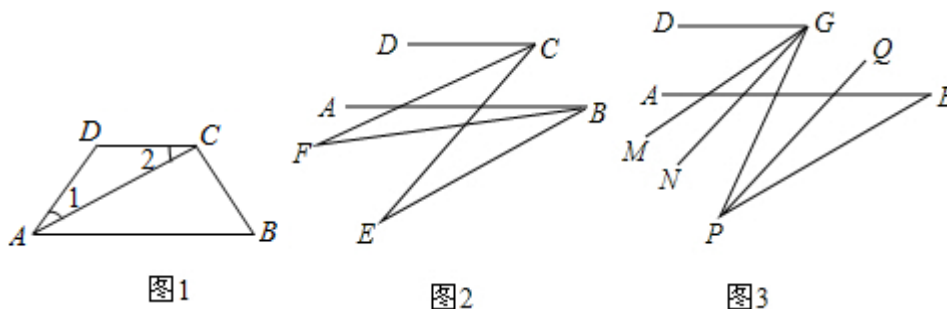
③过点 E 做 AB 的平行线后求证;

④过中间各点分别做 AB 的平行线;

4. (1) 如图 1, AC 平分 $\angle DAB$, $\angle 1 = \angle 2$, 试说明 AB 与 CD 的位置关系, 并予以证明;

(2) 如图 2, 在 (1) 的条件下, AB 的下方两点 E, F 满足 $\angle EBF = 2\angle ABF$, CF 平分 $\angle DCE$, 若 $\angle F$ 的 2 倍与 $\angle E$ 的补角的和为 190° , 求 $\angle ABE$ 的度数;

(3) 如图 3, 在前面的条件下, 若 P 是 BE 上一点, G 是 CD 上任一点, PQ 平分 $\angle BPG$, $PQ \parallel GN$, GM 平分 $\angle DGP$, 下列结论: ① $\angle DGP - \angle MGN$ 的值不变; ② $\angle MGN$ 的度数不变. 可以证明, 只有一个是正确的, 请你作出正确的选择并求值.



【答案】(1) $AB \parallel CD$, 略; (2) 30° ; (3) ②正确, $\angle MGN = 15^\circ$

【分析】(1) 根据内错角相等, 两直线平行证明即可;

(2) 如下图 2, 设 CE 与 BF 相交于点 P , $\angle ABF = x$,
 则 $\angle EBF = 2x$, $\angle ABE = 3x$,

$$\angle E + \angle EBF = \angle F + \angle ECF, \quad \angle 1 = \angle E + \angle ABE = \angle E + 3x,$$

$\because AB \parallel CD$, CF 平分 $\angle DCE$,

$$\therefore \angle 1 = \angle DCE, \quad \angle ECF = \frac{1}{2} \angle DCE = \frac{1}{2} (\angle E + 3x),$$

$$\therefore \angle CPB = \angle E + 2x = \angle F + \frac{1}{2} (\angle E + 3x),$$

整理得, $2\angle F - \angle E = x$,

$$\text{由题意, } 2\angle F + 180^\circ - \angle E = 190^\circ,$$

解得: $x = 10^\circ$, 即 $\angle ABE = 30^\circ$;

(3) 如下图 3, 根据三角形的外角性质, $\angle 1 = \angle BPG + \angle B$,

$\because PQ$ 平分 $\angle BPG$, GM 平分 $\angle DGP$,

$$\therefore \angle GPQ = \frac{1}{2} \angle BPG, \quad \angle MGP = \frac{1}{2} \angle DGP$$

$\because AB \parallel CD$, $\therefore \angle 1 = \angle DGP$,

$$\therefore \angle MGP = \frac{1}{2} (\angle BPG + \angle B),$$

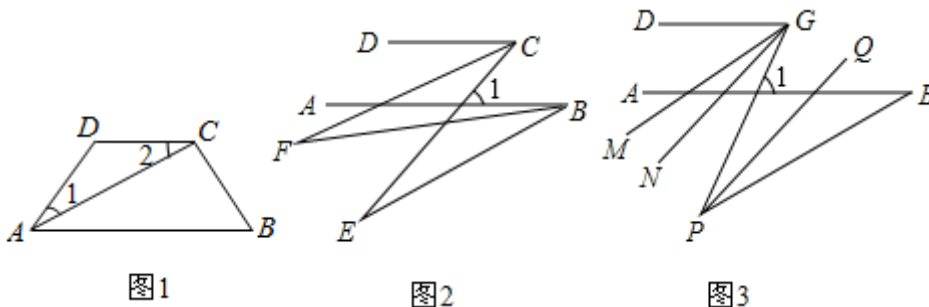
$\because PQ \parallel GN$,

$$\therefore \angle NGP = \angle GPQ = \frac{1}{2} \angle BPG,$$

$$\therefore \angle MGN = \angle MGP - \angle NGP = \frac{1}{2} (\angle BPG + \angle B) - \frac{1}{2} \angle BPG = \frac{1}{2} \angle B,$$

又 $\angle B = 30^\circ$, 则 $\angle MGN = 15^\circ$.

$\therefore$ ① $\angle DGP - \angle MGN$ 的值随 $\angle DGP$ 的变化而变化; ② $\angle MGN$ 的度数为 15° 不变.



5. (1) 光线从空气中射入水中会产生折射现象, 同时光线从水中射入空气中也会产生折射现象, 如图 1, 光线 a 从空气中射入水中, 再从水中射入空气中,

形成光线 b ，根据光学知识有 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，请判断光线 a 与光线 b 是否平行，并说明理由；

(2) 如图 2，直线 EF 上有两点 A 、 C ，分别引两条射线 AB 、 CD 。已知 $\angle BAF = 150^\circ$ ， $\angle DCF = 80^\circ$ ，射线 AB 、 CD 分别绕点 A 、点 C 以 1 度/秒和 3 度/秒的速度同时顺时针转动，设时间为 t 秒，当射线 CD 转动一周时，两条射线同时停止。则当直线 CD 与直线 AB 互相垂直时， $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 秒。

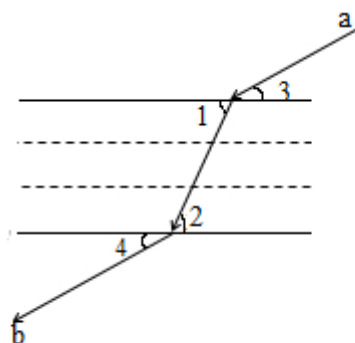


图1

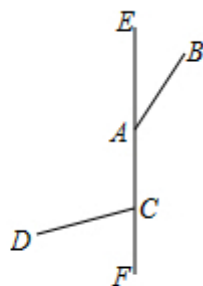


图2

【答案】(1) 平行；(2) 20 或 110。

【分析】(1) 利用内错角相等可得 $a \parallel b$ ；

(2) 实际为射线 AB 与射线 CD 的追及问题，可将 CD 向上平移直到点 C 与点 A 重合后，分以下两种情况讨论：当 CD 旋转追上 AB 前两射线垂直，可得 $t = 20s$ ；当 CD 旋转追上 AB 后两射线垂直，可得 $t = 110s$ 。（具体可参考《小学数学 一步到位》3-6 的时钟问题）

L7 拓展篇第七讲—实数

参考答案与试题解析

1. 已知 $\sqrt{a-1}+(ab-2)^2=0$, 则 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\dots+\frac{1}{(a+2008)(b+2008)}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{2009}{2010}$

【分析】 根据非负数性质可知 $a-1=0$ 且 $ab-2=0$

解得 $a=1$ $b=2$

则原式 $=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{2009\times 2010}$

裂项得 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}=1-\frac{1}{2010}=\frac{2009}{2010}$;

故答案为 $\frac{2009}{2010}$

2. 请证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数.

【答案】 略

【分析】 证：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，

则存在两个互质的正整数 m , n , 使得 $\sqrt{3}=\frac{n}{m}$,

于是有 $3m^2=n^2$,

$\therefore 3m^2$ 是 3 的倍数，

$\therefore n^2$ 也是 3 的倍数，

$\therefore n$ 是 3 的倍数，

设 $n=3t$ (t 是正整数)，则 $n^2=9t^2$, 即 $9t^2=3m^2$,

$\therefore 3t^2=m^2$,

$\therefore m$ 也是 3 的倍数，

$\therefore m$, n 都是 3 的倍数，不互质，与假设矛盾，

$\therefore \sqrt{3}$ 不是有理数.

3. 已知： m , n 是两个连续自然数 ($m < n$) , 且 $q=mn$. 设 $p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}$,

则 p (_____).

A、总是奇数； B、总是偶数； C、有时是奇数，有时是偶数； D、有时是

有理数，有时是无理数.

请选出答案，并给出证明过程.

【答案】A，证明略。

【分析】选A.

证明：由已知得 $n = m + 1$,

则 $q = mn = m(m + 1)$, $q + n = m(m + 1) + (m + 1) = m^2 + m + m + 1 = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$

$q - m = m(m + 1) - m = m^2$,

$\therefore p = \sqrt{q + n} + \sqrt{q - m} = m + 1 + m = 2m + 1$,

所以 p 为奇数.

4. 设 a 为有理数， x 为无理数，证明：(1) $a + x$ 是无理数；(2) 当 $a \neq 0$ 时， ax 是无理数.

【答案】略

【分析】证明：(1) 任何有理数都可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的形式 (p, q 都是整数)，反过

来也一样，任何写成 $\frac{q}{p}$ (p, q 都是整数) 的数都是有理数，

$\therefore a$ 为有理数， $\therefore a = \frac{q}{p}$.

假设 $a + x$ 是有理数，那么 $a + x = \frac{q'}{p'}$, $x = \frac{q'}{p'} - a = \frac{q'}{p'} - \frac{q}{p} = \frac{pq' - qp'}{pp'}$,

那么 x 是有理数，这与 x 为无理数矛盾，

所以 $a + x$ 为无理数；

(2) 假设 ax 是有理数，那么 $ax = \frac{q'}{p'}$, $x = \frac{pq'}{qp'}$

所以 x 是有理数，这与 x 为无理数矛盾，

所以当 $a \neq 0$ 时， ax 为无理数.

5. 斐波那契 (约 1170–1250，意大利数学家) 数列是按某种规律排列的一列数，

他发现该数列中的每个正整数都可以用无理数的形式表示，如第 n (n 为正整

数) 个数 a_n 可表示为 $\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$.

(1) 计算第一个数 a_1 ；

(2) 计算第二个数 a_2 ;

(3) 证明连续三个数之间 a_{n-1} , a_n , a_{n+1} 存在以下关系: $a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$;

(4) 写出斐波那契数列中的前 8 个数.

【答案】 (1) 1; (2) 1; (3) 略; (4) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.

【分析】 (1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1;$

(2) $a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1;$

(3) 证明: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right];$$

(4) 斐波那契数列中的前 8 个数是 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.

6. 求满足条件 $\sqrt{a-2\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ 的正整数 a 、 x 、 y .

【答案】 $x=6$, $y=1$, $a=7$ 或 $x=3$, $y=2$, $a=5$.

【分析】 将原式两边平方得 $a-2\sqrt{6} = x+y-2\sqrt{xy}$. ①

显然, $a-2\sqrt{6}$ 是无理数, 假设 $\sqrt{xy}$ 是有理数, 则 $x+y-2\sqrt{xy}$ 是有理数, 这与①

式矛盾, 所以 $\sqrt{xy}$ 必为无理数.

由①式变形为

$$x+y-a = 2(\sqrt{xy} - \sqrt{6}).$$

假设 $x+y-a \neq 0$ ，则 $\sqrt{xy}-\sqrt{6}$ 必为非零有理数，设为 $k(k \neq 0)$ ，即 $\sqrt{xy}-\sqrt{6}=k$ ，

所以有 $\sqrt{xy}=\sqrt{6}+k$ ，两边平方得： $xy=6+2k\sqrt{6}+k^2$ ，所以 $2k\sqrt{6}=xy-6-k^2$ 。

因为 $k \neq 0$ ，所以 $2k\sqrt{6}$ 是无理数，而 $xy-6-k^2$ 是有理数，矛盾。

所以 $x+y-a=0$ 且 $\sqrt{xy}-\sqrt{6}=0$ 。所以 $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=6. \end{cases}$ 又因为 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-2\sqrt{6}}>0$ ，

所以 $x>y$ ，所以满足条件的正整数为： $x=6, y=1, a=7$ 或 $x=3, y=2, a=5$ 。

7. 已知在等式 $\frac{ax+b}{cx+d}=S$ 中， $a、b、c、d$ 都是有理数， x 是无理数，问：

(1) 当 $a、b、c、d$ 满足什么条件时， S 是有理数；

(2) 当 $a、b、c、d$ 满足什么条件时， S 是无理数。

【答案】(1) 当 $a=c=0$ ，且 $d \neq 0$ ；或 $c \neq 0$ ，且 $ad=bc$ 时， S 为有理数；(2) 当 $c=0, a \neq 0, d \neq 0$ ；或 $c \neq 0, ad \neq bc$ ， S 为无理数。

【分析】(1) 当 $a=c=0, d \neq 0$ 时， $S=\frac{b}{d}$ 为有理数。

当 $c \neq 0$ 时，有 $S=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$ ，

所以，只有当 $bc-ad=0$ ，即 $ad=bc$ 时， S 为有理数。

故当 $a=c=0$ ，且 $d \neq 0$ ；或 $c \neq 0$ ，且 $ad=bc$ 时， S 为有理数。

(2) 当 $c=0, d \neq 0, a \neq 0$ 时， $S=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ 为无理数。

当 $c \neq 0$ 时，有 $S=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$ ，

故只有当 $bc-ad \neq 0$ ，即 $ad \neq bc$ 时， S 为无理数。

所以，当 $c=0, a \neq 0, d \neq 0$ ；或 $c \neq 0, ad \neq bc$ ， S 为无理数。

L7 拓展篇第八讲一方程组（一）

参考答案与试题解析

1. 解方程组
$$\begin{cases} x - y - z = 5, & \textcircled{1} \\ y - x - z = 1, & \textcircled{2} \\ z - x - y = -15. & \textcircled{3} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 7, \\ y = 5, \\ z = -3, \end{cases}$$

【分析】将①+②+③，得 $x + y + z = 9$. ④

由④+①得 $2x = 14$, $x = 7$.

由④+②得 $2y = 10$, $y = 5$.

由④+③得 $2z = -6$, $z = -3$.

所以
$$\begin{cases} x = 7, \\ y = 5, \\ z = -3, \end{cases}$$
 为原方程组的解.

2. 解方程组
$$\begin{cases} x - y + z = 1, & \textcircled{1} \\ y - z + u = 2, & \textcircled{2} \\ z - u + v = 3, & \textcircled{3} \\ u - v + x = 4, & \textcircled{4} \\ v - x + y = 5. & \textcircled{5} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 6, \\ z = 7, \\ u = 3, \\ v = -1. \end{cases}$$

【分析】注意到各方程中同一未知数系数的关系，可以先得到下面四个二元方程：

①+②得 $x + u = 3$, ⑥

②+③得 $y + v = 5$, ⑦

③+④得 $z + x = 7$, ⑧

④+⑤得 $u + y = 9$. ⑨

又①+②+③+④+⑤得

$x + y + z + u + v = 15$. ⑩

⑩-⑥-⑦得 $z = 7$, 把 $z = 7$ 代入⑧得 $x = 0$, 把 $x = 0$ 代入⑥得 $u = 3$, 把 $u = 3$ 代入⑨得

$$y=6, \text{ 把 } y=6 \text{ 代入⑦得 } v=-1. \text{ 所以 } \begin{cases} x=0, \\ y=6, \\ z=7, \\ u=3, \\ v=-1. \end{cases} \text{ 为原方程组的解.}$$

$$3. \text{ 已知 } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0, \text{①} \\ \frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z} = 0. \text{②} \end{cases}$$

求 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ 的值.

【答案】 -1

【分析】 ①-②消去 x 得 $\frac{8}{y} + \frac{8}{z} = 0$, 即 $\frac{y}{z} = -1$. ① $\times 3$ + ②消去 y 得 $\frac{4}{x} + \frac{4}{z} = 0$, 即 $\frac{z}{x} = -1$. ① $\times 5$ + ② $\times 3$ 消去 z 得 $\frac{8}{x} - \frac{8}{y} = 0$, 即 $\frac{x}{y} = 1$. 所以, $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1 - 1 - 1 = -1$ 即为所求.

$$4. \text{ 解方程组 } \begin{cases} 5x - y + 3z = a, \text{①} \\ 5y - z + 3x = b, \text{②} \\ 5z - x + 3y = c. \text{③} \end{cases}$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x = \frac{2a+b-c}{14}, \\ y = \frac{2b+c-a}{14}, \\ z = \frac{2c+a-b}{14}, \end{cases}$$

【分析】 ① $\times 2$ + ② - ③消去 y 、 z , 得 $14x = 2a + b - c$, 所以 $x = \frac{2a+b-c}{14}$.

由② $\times 2$ + ③ - ①, 得 $y = \frac{2b+c-a}{14}$.

由③ $\times 2$ + ① - ②, 得 $z = \frac{2c+a-b}{14}$.

$$\text{所以, 原方程组的解为 } \begin{cases} x = \frac{2a+b-c}{14}, \\ y = \frac{2b+c-a}{14}, \\ z = \frac{2c+a-b}{14}, \end{cases}$$

5. 已知方程组 $\begin{cases} 4x-3y=k \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ 的解中 x 的绝对值与 y 的绝对值相等, 则 k 的值为_____.

【答案】1 或 -35

【分析】方程组 $\begin{cases} 4x-3y=k \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ 的解中 x 与 y 的绝对值相等,

①当 $x=y$ 时, $2x+3y=2x+3x=5x=5$, 解得: $x=1$, $\therefore y=1$, $\therefore k=4x-3y=4-3=1$;

②当 $x=-y$ 时, $2x+3y=-2y+3y=y=5$, $\therefore x=-5$, $\therefore k=-35$,

综上: k 的值为 1 或 -35;

6. 解方程组 $\begin{cases} 3x-y=1 \\ |x+y|=7 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1.5 \\ y=-5.5 \end{cases}$

【分析】解: ①当 $x+y > 0$ 时, $|x+y|=7$.

所以原方程组可化为 $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+y=7 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$.

因为 $x+y > 0$, 所以 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 是原方程组的解;

②当 $x+y < 0$ 时, $|x+y|=7$.

所以原方程组可化为 $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+y=-7 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=-1.5 \\ y=-5.5 \end{cases}$.

因为 $x+y < 0$, 所以 $\begin{cases} x=-1.5 \\ y=-5.5 \end{cases}$ 是原方程组的解;

综上, 原方程组的解是 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1.5 \\ y=-5.5 \end{cases}$.

L7 拓展篇第九讲一方程组（二）

参考答案与试题解析

1. 已知 $\frac{ab}{a+b}=2$, $\frac{ac}{a+c}=5$, $\frac{bc}{b+c}=4$, 求 $a+b+c$ 的值.

【答案】 $-\frac{3160}{99}$

【分析】 根据题意有 $\begin{cases} \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}, \\ \frac{a+c}{ac}=\frac{1}{5}, \\ \frac{b+c}{bc}=\frac{1}{4}. \end{cases}$ 整理得: $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}, \textcircled{1} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{5}, \textcircled{2} \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}. \textcircled{3} \end{cases}$

$(\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3}) \div 2$, 得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{19}{40}$. $\textcircled{4}$

$\textcircled{4}-\textcircled{1}$ 得

$$\frac{1}{c}=-\frac{1}{40}, \quad c=-40.$$

$\textcircled{4}-\textcircled{2}$ 得

$$\frac{1}{b}=\frac{11}{40}, \quad b=\frac{40}{11}.$$

$\textcircled{4}-\textcircled{3}$ 得

$$\frac{1}{a}=\frac{9}{40}, \quad a=\frac{40}{9}.$$

$$\text{所以 } a+b+c=\frac{40}{9}+\frac{40}{11}+(-40)=-\frac{3160}{99}.$$

2. 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} ax+2y=1+a, \textcircled{1} \\ 2x+2(a-1)y=3. \textcircled{2} \end{cases}$ 分别求出当 a 为何值时, 方程组

有唯一一组解; 无解; 有无穷多组解.

【答案】 当 $a \neq 2$ 且 $a \neq -1$ 时, 方程组有唯一解; 当 $a = -1$ 时, 方程组无解; 当 $a = 2$ 时, 方程组有无穷多组解.

【分析】 由 $\textcircled{1}$ 式得: $2y = (1+a) - ax$, $\textcircled{3}$

将 $\textcircled{3}$ 代入 $\textcircled{2}$ 得: $(a-2)(a+1)x = (a-2)(a+2)$. $\textcircled{4}$

当 $(a-2)(a+1) \neq 0$, 即 $a \neq 2$ 且 $a \neq -1$ 时,

方程 $\textcircled{4}$ 有唯一解 $x = \frac{a+2}{a+1}$, 将此 x 值代入 $\textcircled{3}$ 有 $y = \frac{1}{2(a+1)}$,

因而原方程组有唯一一组解.

当 $(a-2)(a+1)=0$, 且 $(a-2)(a+2) \neq 0$ 时, 即 $a=-1$ 时, 方程④无解, 因此原方程组无解.

当 $(a-2)(a+1)=0$ 且 $(a-2)(a+2)=0$ 时, 即 $a=2$ 时, 方程④有无穷多个解, 因此原方程组有无穷多组解.

3. 若方程组 $\begin{cases} 3x+4y=m-4, \\ x-2y=3m+2\frac{1}{2} \end{cases}$ 的解满足 $x+y=0$, 求 m 的值.

【答案】 $\frac{19}{12}$.

【分析】 将 $x=-y$ 代入原方程组, 得: $\begin{cases} y=m-4, \\ -3y=3m+2\frac{1}{2} \end{cases}$ 所以, $3m-12+3m+\frac{5}{2}=0$,

$$m = \frac{19}{12}.$$

4. 已知关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases} 3x+4y=-5, \\ 5x+6y=-9, \\ (n-8m)x-8y=10, \\ 5x+(10m+2n)y=-9 \end{cases}$ 有解, 求 m^2+n^2 的值.

【答案】 $\frac{9}{13}$.

【分析】 解方程组 $\begin{cases} 3x+4y=-5, \\ 5x+6y=-9, \end{cases}$ 得到 $x=-3$, $y=1$, 代入原方程组中后两个方程,

得到 $\begin{cases} 8m-n=6, \\ 5m+n=3. \end{cases}$ ①, 解得: $m=\frac{9}{13}$, $n=-\frac{6}{13}$, 故 $m^2+n^2=\frac{117}{169}=\frac{9}{13}$.

5. 已知 $xyz \neq 0$, 且 $x+2y+z=0$, $5x+4y-4z=0$, 求 $\frac{x^2+6y^2-10z^2}{3x^2-4yz+5z^2}$ 的值.

【答案】 $\frac{15}{46}$.

【分析】 已知代数式中含有 x 、 y 、 z 三个字母, 而等式只有 2 个, 在一般情况下是不可能求出 x 、 y 、 z 的具体值来的. 因此, 可以把已知条件中的 z 视为常数, 得到关于 x 、 y 的方程组, 从而找出 x 、 y 与 z 的关系, 由此可求出其值.

把已知等式视作关于 x 、 y 的方程, z 视作常数, 得关于 x 、 y 的方程组

$$\begin{cases} x+2y+z=0, \\ 5x+4y-4z=0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=2z, \\ y=-\frac{3}{2}z. \end{cases}$$

因为 $xyz \neq 0$ ，所以 $z \neq 0$ ，于是

$$\begin{aligned} \frac{x^2+6y^2-10z^2}{3x^2-4yz+5z^2} &= \frac{(2z)^2+6\left(-\frac{3}{2}z\right)^2-10z^2}{3\cdot(2z)^2-4\left(-\frac{3}{2}z^2\right)+5z^2} \\ &= \frac{4z^2+\frac{27}{2}z^2-10z^2}{12z^2+6z^2+5z^2} = \frac{15}{46}. \end{aligned}$$

6. 如果方程组 $\begin{cases} x+y=m, \\ 5x+3y=11 \end{cases}$ 的解是正整数，求整数 m 的值.

【答案】 3.

【分析】 解方程组得

$$\begin{cases} x = \frac{11-3m}{2}, \textcircled{1} \\ y = \frac{5m-11}{2}. \textcircled{2} \end{cases}$$

因为 x 、 y 都是正整数，所以

$$\begin{cases} \frac{11-3m}{2} \geq 1, \\ \frac{5m-11}{2} \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{解得} \frac{13}{5} \leq m \leq 3.$$

因为 m 是整数，所以 $m=3$.

将 $m=3$ 代入①和②式， x 、 y 的值均为正整数.

故 $m=3$.

L7 拓展篇第十讲一不等式

参考答案与试题解析

1. 已知 $2(x-2)-3(4x-1)=9(1-x)$ ，且 $y < x+9$ ，试比较 $\frac{1}{\pi}y$ 与 $\frac{10}{31}y$ 的大小.

【答案】 $\frac{1}{\pi}y > \frac{10}{31}y$

【分析】解关于 x 的方程得 $x = -10$. 将 $x = -10$ 代入不等式得 $y < -10 + 9$ ，即 $y < -1$.

又因为 $\frac{1}{\pi} < \frac{10}{31}$ ，所以 $\frac{1}{\pi}y > \frac{10}{31}y$

2. 解关于 x 的不等式 $\frac{3x+3}{a^2} - 2 > \frac{1-2x}{a}$.

【答案】当 $a > -\frac{3}{2}$ ($a \neq 0$) 时， $x > a-1$ ；当 $a = -\frac{3}{2}$ 时，无解；当 $a < -\frac{3}{2}$ 时， $x < a-1$.

【分析】由题设知 $a \neq 0$ ，去分母并整理得 $(2a+3)x > (2a+3)(a-1)$.

当 $2a+3 > 0$ ，即 $a > -\frac{3}{2}$ ($a \neq 0$) 时， $x > a-1$ ；

当 $2a+3 = 0$ ，即 $a = -\frac{3}{2}$ 时，无解；

当 $2a+3 < 0$ ，即 $a < -\frac{3}{2}$ 时， $x < a-1$.

3. 如果关于 x 的不等式 $(2a-b)x + a - 5b > 0$ 的解集为 $x < \frac{10}{7}$ ，求关于 x 的不等式 $ax > b$ 的解集.

【答案】 $x < \frac{3}{5}$

【分析】由已知得 $(2a-b)x > 5b-a$ ，①

$$-7x > -10. \text{ ②}$$

由已知①和②的解集相同，所以

$$\begin{cases} 2a-b < 0 \\ \frac{5b-a}{2a-b} = \frac{10}{7} \end{cases}, \text{ 解得: } a < 0, b < 0, \text{ 且 } a = \frac{5}{3}b;$$

从而 $ax > b$ 的解集是 $x < \frac{3}{5}$.

4. 求同时满足 $a+b+c=6$ ， $2a-b+c=3$ 和 $b \geq c \geq 0$ 的 a 的最大值及最小值.

【答案】最大值为 3，最小值为 $\frac{3}{2}$.

【分析】由 $a+b+c=6$ 和 $2a-b+c=3$ ，得 $b = \frac{3+a}{2}$ ， $c = \frac{9-3a}{2}$.

再由 $b \geq c \geq 0$ 得， $\frac{3+a}{2} \geq \frac{9-3a}{2} \geq 0$ ，解此不等式，得 $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$.

所以 a 的最大值为3, 最小值为 $\frac{3}{2}$.

5. 解不等式 $|x-5|-|2x-3|<1$.

【答案】 $x < -1$ 或 $x > \frac{7}{3}$.

【分析】 原不等式的零点为 5 、 $\frac{3}{2}$. 根据零点的情况分类讨论.

(1) 当 $x > 5$ 时, 原不等式化为 $(x-5)-(2x-3) < 1$, 解得: $x > -3$.

所以, 此时不等式的解为 $x > 5$.

(2) 当 $x < \frac{3}{2}$ 时, 原不等式化为 $-(x-5)+(2x-3) < 1$, 解得: $x < -1$.

所以, 此时不等式的解为 $x < -1$.

(3) 当 $\frac{3}{2} \leq x \leq 5$ 时, 原不等式化为 $-(x-5)-(2x-3) < 1$, 解得: $x > \frac{7}{3}$.

所以, 此时不等式的解为 $\frac{7}{3} < x \leq 5$.

综上, 原不等式的解为 $x < -1$ 或 $x > \frac{7}{3}$.

6. a 取何值时, 不等式 $|2x+5|+|4-2x| < a$ 无实数解?

【答案】 $a \leq 9$.

【分析】 欲使不等式 $|2x+5|+|4-2x| < a$ 无实数解, 关键是求出 $|2x+5|+|4-2x|$ 的最小值.

因 $|2x+5|$ 、 $|4-2x|$ 的零点分别是 $-\frac{5}{2}$ 、 2 .

当 $x \leq -\frac{5}{2}$ 时, $|2x+5|+|4-2x| = -(2x+5)+4-2x = -1-4x$.

当 $x = -\frac{5}{2}$ 时, $|2x+5|+|4-2x|$ 有最小值9;

当 $-\frac{5}{2} < x \leq 2$ 时, $|2x+5|+|4-2x| = 2x+5+4-2x = 9$, 最小值及最大值都是9;

当 $x > 2$ 时, $|2x+5|+|4-2x| = 2x+5+2x-4 = 4x+1$, 无最小值.

故 $|2x+5|+|4-2x|$ 的最小值为9.

欲使不等式 $|2x+5|+|4-2x| < a$ 无实数解, 则 $a \leq 9$.

7. 若不等式 $|x+1|+|x-3| \leq a$ 有解, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a \geq 4$.

【分析】 根据绝对值的几何意义, 因为 $|x+1|$ 、 $|x-3|$ 分别表示数轴上点 x 到点 -1

和3的距离，所以 $|x+1|+|x-3|$ 表示数轴上某点到 A ：-1和 B ：3的距离和. 从图可见，不论 x 在 A 点左边或者 B 点右边时， x 到 A 、 B 点距离和至少为4；当 x 在 AB 两点之间时， x 到 A 、 B 点距离和为4. 所以 $a \geq 4$.

