

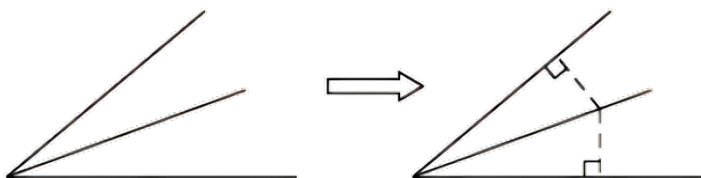
模块二 与角平分线相关的辅助线

2.1 向角两边作垂线

【知识要点】

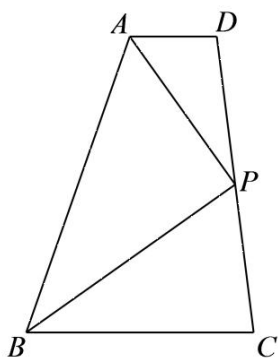
利用角平分线作垂线构造 AAS 或 ASA 型全等.

结论：①以角平分线为界，两边三角形全等；②全等三角形对应边相等，对应角相等；



青铜级别

【例 1】如图，已知四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， AP 平分 $\angle DAB$ ， BP 平分 $\angle ABC$ ，它们的交点 P 在线段 CD 上，下面的结论：① $AP \perp BP$ ；②点 P 到直线 AD 、 BC 的距离相等；③ $PD=PC$ 。其中正确的结论有_____。



A ①②③

B ①②

C ①

D ②

【答案】A

【解析】作 $PE \perp AD$ 交 AD 的延长线于 E ， $PF \perp BC$ 于 F ， $PG \perp AB$ 于 G ，

$$\because AD \parallel BC, \therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\because AP \text{ 平分 } \angle DAB, BP \text{ 平分 } \angle ABC,$$

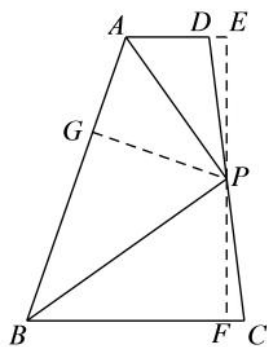
$$\therefore \angle PAB = \frac{1}{2} \angle DAB, \angle PBA = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore \angle PAB + \angle PBA = 90^\circ, \angle APB = 90^\circ, \text{ 即 } AP \perp BP, \text{ ①正确,}$$

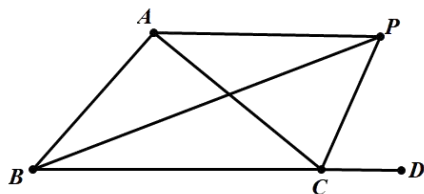
$$\because AP \text{ 平分 } \angle DAB, PE \perp AD, PG \perp AB, PE = PG, \text{ 同理, } PF = PG,$$

$$\therefore PE = PF, \text{ 即点 } P \text{ 到直线 } AD、BC \text{ 的距离相等, ②正确,}$$

由题意得， $\triangle DPE$ 全等 $\triangle CPF$ ， $PD=PC$ ，③正确

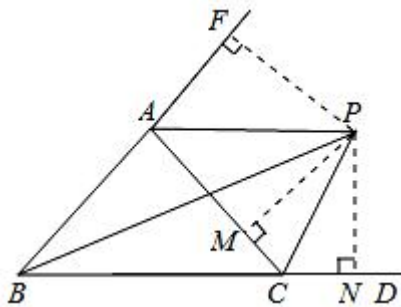


【例 2】如图， $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角 $\angle ABC$ 的平分线 BP 交于点 P ，若 $\angle BPC = 50^\circ$ ，
 $\angle CAP =$ _____.



【答案】 40°

【解析】解：过点 P 作 $PF \perp AB$ 于 F ， $PM \perp AC$ 于 M ， $PN \perp CD$ 于 N ，如图：



设 $\angle PCD = x$ ， $\because CP$ 平分 $\angle ACD$ ， $\therefore \angle ACP = \angle PCD = x$ ， $\therefore PM = PN$ ， $\therefore \angle ACD = 2x$ ，

$\because BP$ 平分 $\angle ABC$ ， $\therefore \angle ABP = \angle PBC$ ， $PF = PM = PN$ ，

$\because \angle BPC = 50^\circ$ ， $\therefore \angle ABP = \angle PBC = \angle PCD - \angle BPC = x - 50^\circ$ ，

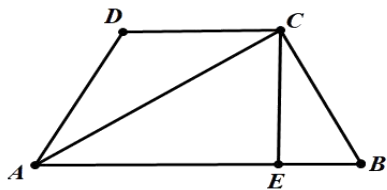
$\therefore \angle ABC = 2(x - 50^\circ)$ ， $\therefore \angle BAC = \angle ACD - \angle ABC = 2x - 2(x - 50^\circ) = 100^\circ$ ，

$\therefore \angle FAC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle APF$ 和 $\text{Rt}\triangle APM$ 中， $\because PF = PM$ ， AP 为公共边， $\therefore \text{Rt}\triangle APF \cong \text{Rt}\triangle APM$ (HL)，

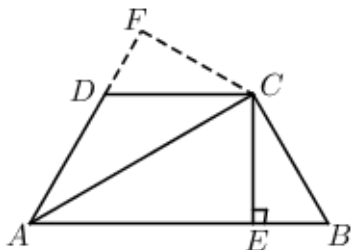
$\therefore \angle FAP = \angle CAP$ ， $\therefore \angle CAP = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$ ；故答案为： 40° ；

【例3】如图， AC 平分 $\angle DAB$ ， $CE \perp AB$ 于点 E ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， $AD = 4$ ， $AE = 6$ ，则 $AB =$ _____.



【答案】8

【解析】如图，过点 C 作 $CF \perp AD$ 交 AD 的延长线于 F ，



$\because AC$ 平分 $\angle BAD$ ， $CE \perp AB$ ， $\therefore CE = CF$ ，

$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， $\angle ADC + \angle CDF = 180^\circ$ （平角定义），

$\therefore \angle CDF = \angle B$ ，在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CBE$ 中，
$$\begin{cases} \angle CDF = \angle B \\ \angle F = \angle CEB = 90^\circ \\ CF = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDF \cong \triangle CBE$ (AAS)， $\therefore DF = BE$ ，

在 $\text{Rt} \triangle ACF$ 和 $\text{Rt} \triangle ACE$ 中，
$$\begin{cases} CF = CE \\ AC = AC \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt} \triangle ACF \cong \text{Rt} \triangle ACE$ (HL)， $\therefore AF = AE$ ，

$\because AF = AD + DF$ ， $\therefore AE = AD + BE$ ，

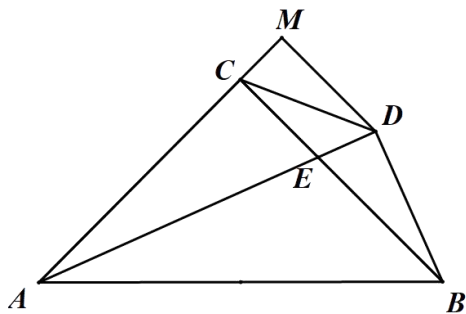
$\because AD = 4$ ， $AE = 6$ ， $\therefore BE = 2$ ，

$\therefore AB = AE + BE = 8$.



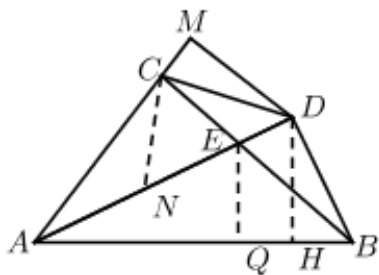
钻石级别

- 【例 4】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AE 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 E ， $BD \perp AE$ 于 D ， $DM \perp AC$ 交 AC 的延长线于 M ，连接 CD 。下列结论：① $AC + CE = AB$ ；② $BD = \frac{1}{2}AE$ ；③ $\angle CDA = 45^\circ$ ；④ $\frac{AC+AB}{AM}$ 为定值。其中正确的结论有 _____ 个。



【答案】 4

【解析】过 E 作 $EQ \perp AB$ 于 Q ，



由勾股定理得： $AC = AQ$ ， $\therefore \angle QEB = 45^\circ = \angle CBA$ ，

$\therefore EQ = BQ$ ， $\therefore AB = AQ + BQ = AC + CE$ ， $\therefore$ ①正确；

作 $\angle ACN = \angle BCD$ ，交 AD 于 N ， $\therefore \triangle ACN \cong \triangle BCD$ ， $\therefore CN = CD$ ，

$\therefore \angle ACN = 45^\circ - 22.5^\circ = 22.5^\circ = \angle CAN$ ， $\therefore AN = CN$ ， $\therefore \angle NCE = \angle AEC = 67.5^\circ$ ，

$\therefore CN = NE$ ， $\therefore BD = AN = EN = \frac{1}{2}AE$ ， $\therefore$ ②正确，③正确；

过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ， $\therefore \triangle DCM \cong \triangle DBH$ ， $\therefore BH = CM$ ，

$\therefore \frac{AC+AB}{AM} = \frac{AC+AH+BH}{AM} = \frac{AC+AM+CM}{AM} = \frac{2AM}{AM} = 2$ ，即 $\frac{AM}{AC+AB} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore$ ④正确。



王者级别

【例 5】如图 1, $AC = BC$, $CD = CE$, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 连接 AE , BD 交于点 F .

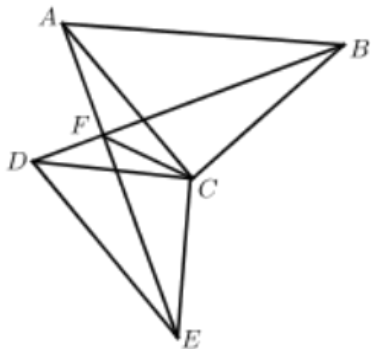
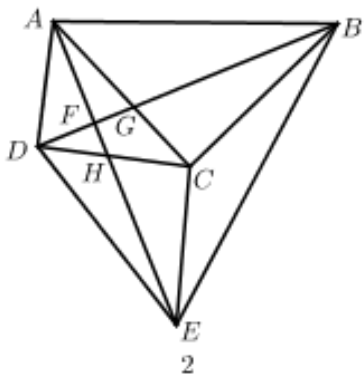


图 1

- (1) 求证: $\triangle CAE \cong \triangle CBD$; $\angle CFB = 45^\circ$;
- (2) 若四边形 $ABED$ 的面积为 18, 求 BD .
- (3) 如图 2, 在 (2) 的条件下, 当 $\angle CAE = \angle ABD$ 时, $\triangle ABG$ 面积为 4, 求 EF .



【答案】(1) 证明见解析. (2) 6. (3) 4.

【解析】(1) $\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DCE + \angle DCA$, $\angle ECA = \angle DCB$,

在 $\triangle ECA$ 和 $\triangle DCB$ 中,
$$\begin{cases} CE = CD \\ \angle ECA = \angle DCB, \therefore \triangle ECA \cong \triangle DCB (\text{SAS}), \\ CA = CB \end{cases}$$

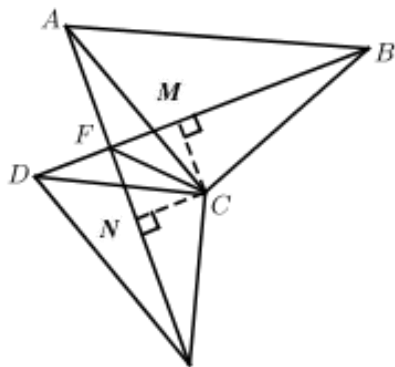
$\therefore EA = BD$, $S_{\triangle ECA} = S_{\triangle DCB}$, $\angle CEA = \angle CDB$,

在 $\triangle DFH$ 中, $\angle FDH + \angle FHD + \angle DFH = 180^\circ$,

在 $\triangle ECH$ 中, $\angle CHE + \angle CEH + \angle ECH = 180^\circ$,

$\because \angle FHD = \angle CHE$, $\therefore \angle DFH = \angle ECH = 90^\circ$,

过点 C 作 $CM \perp BD$, 垂足为 M , $CN \perp AE$, 垂足为 N ,



$$\therefore \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot CN, \quad \therefore CM = CN,$$

$$\therefore CF \text{ 平分 } \angle BFE, \quad \therefore \angle BFC = \frac{1}{2} \angle BFE = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ.$$

$$(2) S_{ABED} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AF + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot BD^2 = 18,$$

$$\therefore BD = 6.$$

(3) 由 (1) 知, $\angle CAE = \angle CBD = \angle ABD$, 延长 BC 交 AE 于点 K ,

$$\angle BFA = \angle BFK = 90^\circ, \quad \text{在 } \triangle BFA \text{ 和 } \triangle BFK \text{ 中, } \begin{cases} \angle BFA = \angle BFK \\ BF = BF \\ \angle ABF = \angle KBF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BFA \cong \triangle BFK (\text{ASA}), \quad \therefore AF = FK, \quad \angle BCG = \angle ACK = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ACK \text{ 和 } \triangle BCG \text{ 中, } \begin{cases} \angle ACK = \angle BCG \\ AC = BC \\ \angle CAK = \angle CBG \end{cases}, \quad \therefore \triangle ACK \cong \triangle BCG (\text{ASA}),$$

$$\therefore AK = BG = 2AF, \quad \therefore S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot AF = AF^2 = 4, \quad \therefore AF = 2,$$

$$\therefore EF = AE - AF = 4.$$

