

习题 L9-16: 与圆有关的位置关系(一)

参考答案与试题解析

1. 已知点 P 在半径为 r 的 $\odot O$ 内, 且 $OP=3$, 则 r 的值可能为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 5, 点 P 的坐标为 $(3,4)$, 则点 P 与 $\odot O$ 的位置关系是()

- A. 点 P 在 $\odot O$ 内 B. 点 P 在 $\odot O$ 上
C. 点 P 在 $\odot O$ 外 D. 无法确定

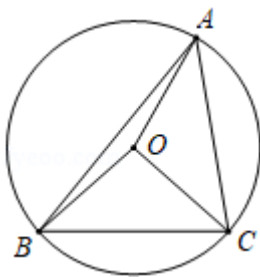
【答案】B

3. 给出下列说法: ①半径相等的圆是等圆; ②长度相等的弧是等弧; ③以 $2cm$ 长为半径的圆有无数个; ④平面上任意三点能确定一个圆, 其中正确的有()

- A. ②④ B. ①③ C. ①③④ D. ①②③④

【答案】B

4. $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle ABO=20^\circ$, $\angle OAC=40^\circ$, 则 $\angle OBC$ 的度数为()



- A. 30° B. 40° C. 60° D. 120°

【答案】A

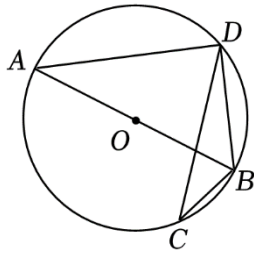
【解答】解: $\because OA=OB$, $\therefore \angle OAB=\angle ABO=20^\circ$,

$\therefore \angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=\angle ABO+\angle OAC=60^\circ$,

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=120^\circ$, $\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$.

5. 如图, 已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABD$ 的外接圆, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦, 若

$\angle BCD = 35^\circ$ ，则 $\angle ABD$ 等于()

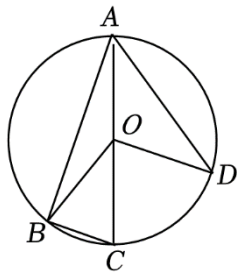


- A. 35° B. 45° C. 55° D. 65°

【答案】 C

【分析】 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， $\angle BCD = 35^\circ$ ， $\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle BAD = \angle BCD = 35^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABD = 90^\circ - \angle BAD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

6. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AC 为直径，半径 $OD \parallel BC$ ，连接 OB ， AD . 若 $\angle AOB = \alpha$ ，则 $\angle BAD$ 的度数为()



- A. $\frac{\alpha}{2}$ B. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ C. $90^\circ - \frac{\alpha}{4}$ D. $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$

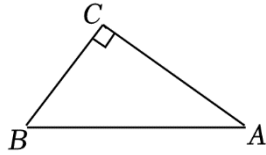
【答案】 C

【解答】解： $\because AC$ 为 $\odot O$ 的直径， $\angle AOB = \alpha$ ，
 $\therefore \angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{\alpha}{2}$ ， $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - \alpha$ ，
 $\because OD \parallel BC$ ， $\therefore \angle DOC = \angle C = \frac{\alpha}{2}$ ， $\therefore \angle BOD = \angle BOC + \angle DOC = 180^\circ - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ，
 $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} (180^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{4}$.

7. 用反证法证明命题“在四边形中至少有一个内角不大于 90° ”时，首先应假设()

- A. 每个内角都小于 90° B. 每个内角都大于 90°
 C. 没有一个内角大于 90° D. 每个内角都等于 90°

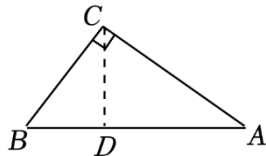
【答案】 B



- A. $0 < r < 2.4$ B. $r = 2.4$ C. $r > 2.4$ D. $2.4 < r < 4$

【答案】C

【解答】

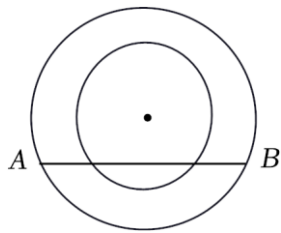


解：如图，过C作 $CD \perp AB$ 于D，

$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 4, BC = 3, \therefore AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \therefore CD = \frac{BC \cdot AC}{AB} = 2.4,$$

$\therefore$ 直线AB与 $\odot C$ 相交，则 r 的取值范围是 $r > 2.4$.

13. 如图，两个同心圆，大圆的半径为5，小圆的半径为3，若大圆的弦AB与小圆有公共点，则弦AB的取值范围是_____.



【答案】 $8 \leq AB \leq 10$.

【解答】解：当AB是大圆直径时AB的值最大，最大值为10.

当AB与小圆相切时AB最小.

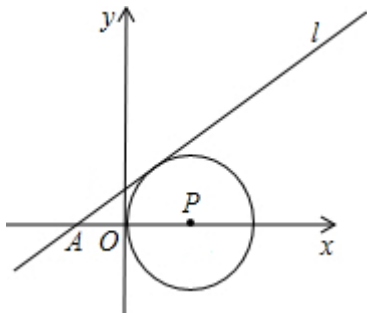
$\therefore$ 小圆的半径为3，大圆半径为5，

$$\therefore AB = 2 \times \sqrt{5^2 - 3^2} = 8.$$

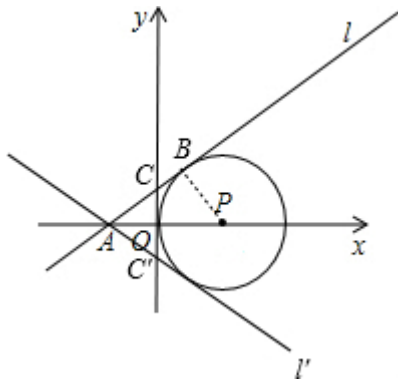
$\therefore$ 大圆的弦AB与小圆有公共点，即相切或相交，

$$\therefore 8 \leq AB \leq 10.$$

14. 如图，点P在x轴上， $OP = 2$ ，以点P为圆心，OP长为半径作圆，已知经过点A(-2,0)的直线l的函数解析式为 $y = kx + b$ ，当l分别与 $\odot P$ 相交、相切、相离时，求b的取值范围.



【解答】



解：当 l 与 $\odot P$ 相切于 B 点，此时直线 l 交 y 轴于 C 点，如图，连接 PB ，则

$PB \perp l$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PBA$ 中， $\because PB = PO = 2$ ， $PA = PO + OA = 4$ ， $\therefore \angle PAB = 30^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\because \angle OAC = 30^\circ$ ， $OA = 2$ ， $\therefore OC = \frac{\sqrt{3}}{3}OA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore C$ 点坐标为 $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ， $\therefore b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

过点 A 作 l' 与 $\odot P$ 相切，与 y 轴的交点为 C' ，根据对称得 C 点坐标为 $(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，

$\therefore$ 当 l 与 $\odot P$ 相切时， $b = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ；

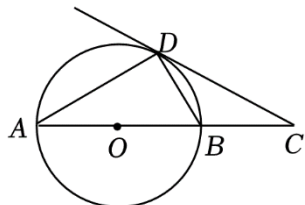
当 l 与 $\odot P$ 相交时， $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ；

当 l 与 $\odot P$ 相离时， $b < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $b > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

习题 L9-17: 与圆有关的位置关系 (二)

参考答案与试题解析

1. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的切线, 切点为 D , CD 与 AB 的延长线交于点 C , 若 $\angle A = 30^\circ$, $AD = 5$, 则 BC 的长度为()



A. $\frac{5}{2}$

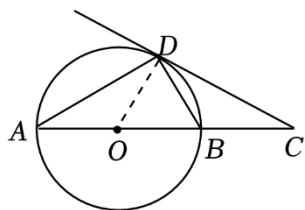
B. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

【答案】D

【解答】



解: 连接 OD , 如图, $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $\because \angle A = 30^\circ$, $\therefore BD = \frac{\sqrt{3}}{3}AD = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $\therefore AB = 2BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$,

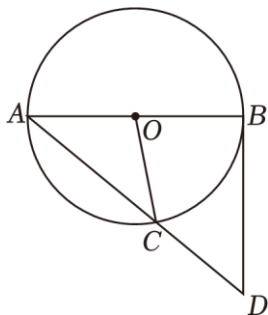
$\therefore OD = OB = \frac{1}{2}AB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $\because OA = OD$, $\therefore \angle ODA = \angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle COD = \angle A + \angle ODA = 60^\circ$, $\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle ODC = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中, $\because \angle DOC = 60^\circ$, $\therefore OC = 2OD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore CB = OC - OB = \frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

2. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, BD 与 $\odot O$ 相切于点 B , 连接 AD 与 $\odot O$ 于点 C , 连接 OC . 若 $\angle D = 50^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数为()

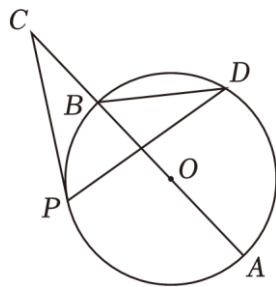


A. 80° B. 85° C. 40° D. 70°

【答案】A

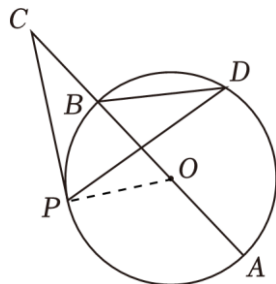
【解答】解：∵ AB 是 $\odot O$ 的直径， BD 与 $\odot O$ 相切于点 B ，∴ $\angle B = 90^\circ$ ，∵ $\angle D = 50^\circ$ ，∴ $\angle A = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ，∵ $AO = OC$ ，∴ $\angle OCA = \angle A = 40^\circ$ ，∴ $\angle BOC = \angle A + \angle OCA = 80^\circ$ 。

3. 如图，过 $\odot O$ 上一点 P 的切线与直径 AB 的延长线交于点 C ，点 D 是圆上一点，且 $\angle BDP = 29^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为()

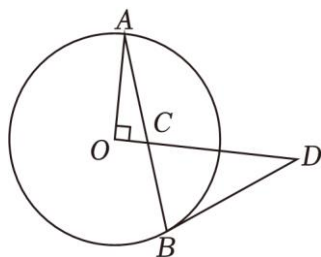
A. 32° B. 33° C. 34° D. 35°

【答案】A

【解答】

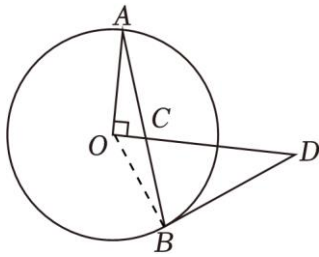
解：连接 OP ，如图，∵ CP 为 $\odot O$ 的切线，∴ $\angle OPC = 90^\circ$ ，∵ $\angle POC = 2\angle BDP = 2 \times 29^\circ = 58^\circ$ ，∴ $\angle C = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ 。

4. 如图， AB 是 $\odot O$ 的弦， $OA \perp OD$ ， BD 与 $\odot O$ 相切， AB ， OD 相交于点 C ，若 $OA = 3$ ， $OC = 1$ ，则线段 BD 的长为_____。



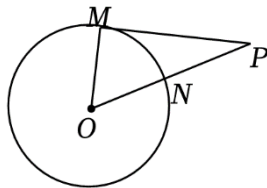
【答案】4.

【解答】



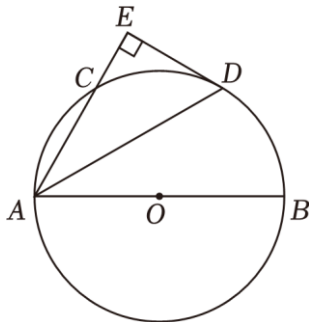
解：连接 OB ， $\because DB$ 切圆于 B ， $\therefore \angle OBD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle DBC + \angle OBA = 90^\circ$ ， $\because OB = OA$ ， $\therefore \angle A = \angle OBA$ ，
 $\therefore \angle A + \angle ACO = 90^\circ$ ， $\therefore \angle DBC = \angle ACO$ ，
 $\because \angle BCD = \angle ACO$ ， $\therefore \angle DBC = \angle BCD$ ， $\therefore BD = CD$ ，
 设 $BD = x$ ， $\because OC = 1$ ， $\therefore OD = OC + CD = 1 + x$ ，
 $\because OD^2 = OB^2 + BD^2$ ， $\therefore (x + 1)^2 = 3^2 + x^2$ ，解得： $x = 4 \therefore BD = 4$ 。

5. 如图所示， $\triangle POM$ 中，点 M 在 $\odot O$ 上，点 P 在 $\odot O$ 外， OP 交 $\odot O$ 于点 N ，以下条件不能判定 PM 是 $\odot O$ 的切线的是()

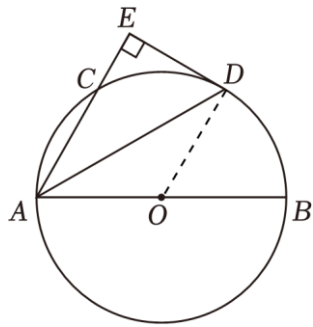
A. $\angle O + \angle P = 90^\circ$ B. $\angle O + \angle P = \angle OMP$ C. $OM^2 + PM^2 = OP^2$ D. 点 N 是 OP 的中点

【答案】D

6. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C ， D 是圆上两点，且有 $CD = BD$ ，连结 AD ， AC ，作 $DE \perp AC$ 延长线于点 E 。求证： DE 是 $\odot O$ 的切线。



【解答】

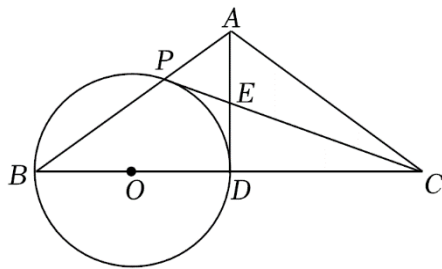


证明：如图，连接 OD ， $\because CD = BD$ ， $\therefore \angle CAD = \angle BAD$ ，
 $\because OA = OD$ ， $\therefore \angle OAD = \angle ODA$ ， $\therefore \angle CAD = \angle ODA$ ，
 $\therefore AE \parallel OD$ ， $\therefore \angle E + \angle ODE = 180^\circ$ ， $\because DE \perp AC$ ， $\therefore \angle E = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ODE = 180^\circ - \angle E = 90^\circ$ ， $\therefore OD \perp ED$ ， $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线。

7. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 的中点。以 BD 为直径作 $\odot O$ ，交边 AB 于点 P ，连接 PC ，交 AD 于点 E 。

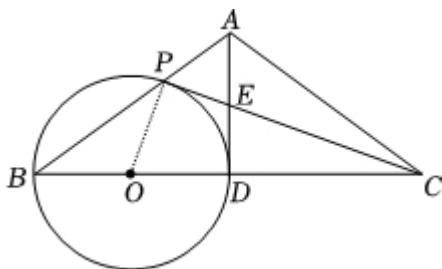
(1) 求证： AD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 PC 是 $\odot O$ 的切线， $BC = 4$ ，求 PC 的长。



【解答】(1) 证明： $\because AB = AC$ ， D 是 BC 的中点， $\therefore AD \perp BC$ ， $\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线；

(2)



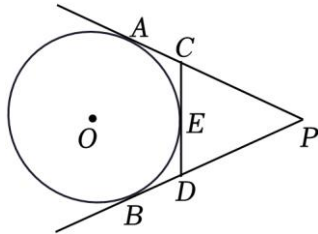
解：如图，连接 OP ，

$\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线， $\therefore \angle OPC = 90^\circ$ ，

$\because BC = 4$ ， D 是 BC 的中点， $\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = 2$ ，

又 $OC = OD + CD = 3$, $\therefore PC = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.

8. 如图, PA , PB 分别切 $\odot O$ 于点 A , B , CD 切 $\odot O$ 于点 E , 且分别交 PA , PB 于点 C , D , 若 $PA=6$, 则 $\triangle PCD$ 的周长为()



A. 5

B. 7

C. 12

D. 10

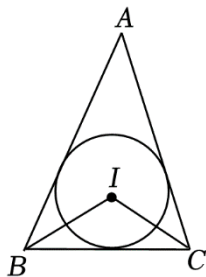
【答案】 C

【解答】解: $\because PA$, PB 分别切 $\odot O$ 于点 A , B , CD 切 $\odot O$ 于点 E , $PA=6$,

$\therefore PB=PA=6$, $CA=CE$, $DB=DE$,

$\therefore \triangle PCD$ 的周长 $= PC + CE + PD + DE = PC + CA + PD + DB = PA + PB = 12$.

9. 如图, 已知 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 点 I 是内心, 若 $\angle A=28^\circ$, 则 $\angle BIC$ 等于 _____.



【答案】 104° .

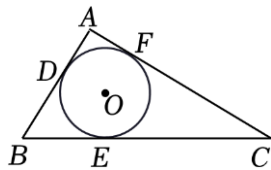
【解答】解: $\because \odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,

$\therefore \angle ABI = \angle CBI = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\angle ACI = \angle BCI = \frac{1}{2} \angle ACB$,

$\because \angle A = 28^\circ$, $\therefore \angle BCI + \angle CBI = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}(180^\circ - 28^\circ) = 76^\circ$,

$\therefore \angle BIC = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$;

10. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 切点分别为 D , E , F , 且 $\angle A=90^\circ$, $BC=10$, $CA=8$, $\triangle ABC$ 的面积是 _____, $\odot O$ 的半径是 _____.



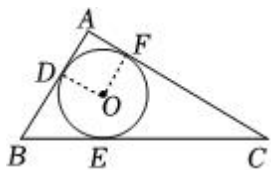
【答案】24，2.

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \angle A = 90^\circ$ ， $BC = 10$ ， $CA = 8$ ，

$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 6$ ， $\therefore \triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2} \times AB \times AC = 24$ ，

$\because \odot O$ 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D ， E ， F ，

$\therefore BD = BE$ ， $AD = AF$ ， $CF = CE$ ，如图，连接 OD ， OF ，



$\because OD \perp AB$ ， $OF \perp AC$ ， $OD = OF$ ，

$\therefore \angle ODA = \angle A = \angle OFA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADOF$ 是正方形，

设 $OD = OF = AF = AD = x$ ，则 $CE = CF = 8 - x$ ， $BD = BE = 6 - x$ ，

$\because BE + CE = 10$ ， $\therefore 8 - x + 6 - x = 10$ ， $\therefore x = 2$ ，即圆 O 的半径为 2.

习题 L9-18: 与圆有关的位置关系 (三)

参考答案与试题解析

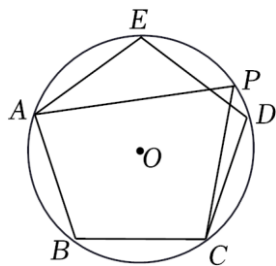
1. 以下说法正确的有 ②③ (填序号).

- ①各角相等的圆内接多边形是正多边形;
 ②各边相等的圆内接多边形是正多边形;
 ③每个角都是 108° , 且各边都相等的多边形是正五边形;
 ④正多边形都是轴对称图形, 也都是中心对称图形.

【答案】②③.

【分析】④正多边形都是轴对称图形, 但不一定是中心对称图形;

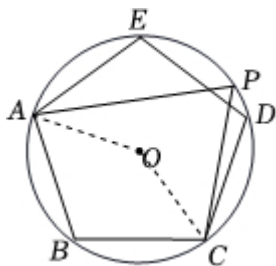
2. 如图, $\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆, 点 P 为 ED 上的一点, 则 $\angle APC$ 的度数为()



- A. 36° B. 60° C. 65° D. 72°

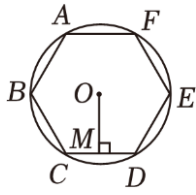
【答案】D

【解答】

解: 如图, 连接 OA , OC ,

$\because ABCDE$ 是正五边形, $\therefore \angle AOC = \frac{360^\circ}{5} \times 2 = 144^\circ$, $\therefore \angle APC = \frac{1}{2} \angle AOC = 72^\circ$.

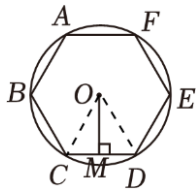
3. 如图, 半径为 2 的 $\odot O$ 是正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆, 则下列说法错误的是 ()



- A. 点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心
 B. 正六边形 $ABCDEF$ 的半径是 2
 C. 正六边形 $ABCDEF$ 的中心角是 60°
 D. 正六边形 $ABCDEF$ 的边心距 $OM = 2\sqrt{3}$

【答案】D

【解答】



解：如图，连接 OC 、 OD ，

根据定义，正多边形外接圆的圆心叫做正多边形的中心，外接圆的半径叫做正多边形的半径，故 A 与 B 正确，

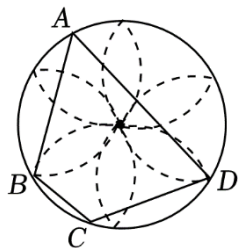
$\because \angle COD = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ， $\therefore$ 正六边形 $ABCDEF$ 的中心角是 60° ，故 C 正确，

又 $\because OC = OD$ ， $\therefore \triangle COD$ 是正三角形， $\therefore CD = OC = OD = 2$ ，

$\because OM \perp CD$ ， $\therefore CM = DM = \frac{1}{2}CD = 1$ ， $\therefore OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{3}$ ，

即正六边形 $ABCDEF$ 的边心距为 $\sqrt{3}$ ，故 D 错误。

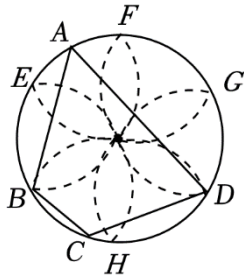
4. 如图，将圆周六等分， B 、 D 是其中两个等分点，点 A 、 C 分别在优弧 BD 、劣弧 BD 上，则 $\angle BAD : \angle BCD$ 的值是()



- A. 1:2 B. 2:3 C. 2:5 D. 3:5

【答案】A

【解答】

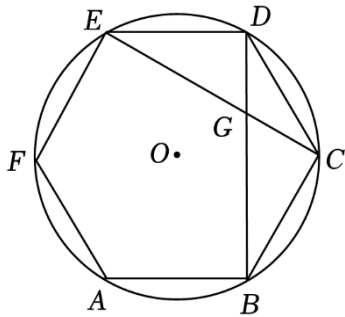


解：如图，由题意， $BE = EF = FG = GD = DH = HB$ ，

$\angle BAD$ 所对的弧是 $2BE$ ，而 $\angle BCD$ 所对的弧是 $4BE$ ， $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BCD$ ，

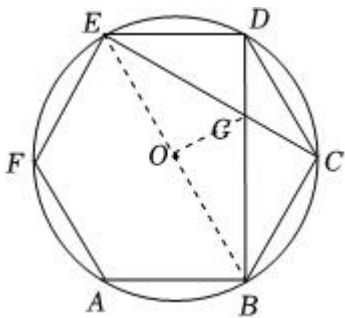
即 $\angle BAD : \angle BCD = 1 : 2$ 。

5. 如图，在圆内接正六边形 $ABCDEF$ 中， BD ， EC 交于点 G ，已知半径为 $\sqrt{3}$ ，则 EG 的长为 _____。



【答案】2.

【分析】



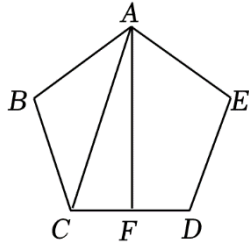
如图，连接 BE 、 GO ， O 是 BE 的中点， $\angle EDC = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$ ， $\angle EOG = 90^\circ$ ，

$\because DE = DC$ ， $\therefore \angle DEC = 30^\circ$ ， $\because BC = CD$ ， $\therefore CD = BC$ ，

$\therefore \angle GEO = \angle DEC = 30^\circ$ ， $\therefore OG = \frac{1}{2} EG$ ，

由勾股定理得: $OG^2 + OE^2 = EG^2$, 即 $(\frac{1}{2}EG)^2 + (\sqrt{3})^2 = EG^2$, 解得: $EG = 2$.

6. 如图, 正五边形 $ABCDE$ 中, 点 F 是 CD 的中点, 连接 AC , AF , 则 $\angle CAF$ 的度数为()



A. 15°

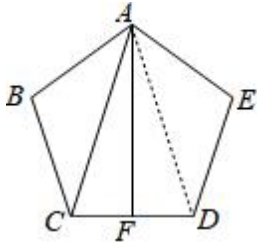
B. 18°

C. 22.5°

D. 30°

【答案】 B

【解答】 解: 如图, 连接 AD ,



$\therefore$ 正五边形 $ABCDE$ 中,

$\therefore AB = AE = BC = DE$, $\angle B = \angle E$,

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle B = \angle E, \\ BC = ED \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED(SAS)$, $\therefore \angle BAC = \angle EAD$, $AC = AD$,

$\therefore F$ 为 CD 边中点, $\therefore AF \perp CD$, $\therefore \angle AFC = 90^\circ$,

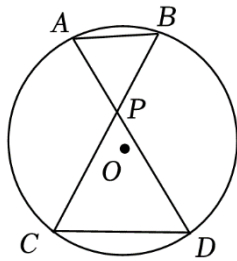
$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形,

$\therefore \angle B = \angle BCD = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{2} = 108^\circ$, $BA = BC$,

$\therefore \angle BCA = \angle BAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$,

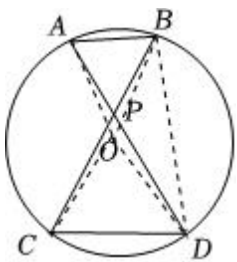
$\therefore \angle ACF = \angle BCD - \angle BCA = 72^\circ$, $\therefore \angle CAF = 90^\circ - \angle ACF = 18^\circ$.

7. 如图, AB , CD 分别是 $\odot O$ 的内接正十边形和正五边形的边, AD , BC 交于点 P , 则 $\angle APC$ 的度数为()

A. 126° B. 127° C. 128° D. 129°

【答案】 A

【解答】



解：如图，连接 OA 、 OB 、 OC 、 OD 、 BD ，

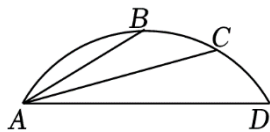
$\because AB$ ， CD 分别是 $\odot O$ 的内接正十边形和正五边形的边，

$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ, \quad \angle COD = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

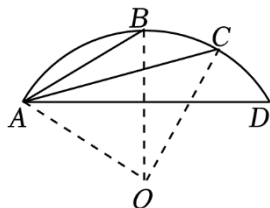
$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = 18^\circ, \quad \angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle APC = \angle BPD = 180^\circ - 18^\circ - 36^\circ = 126^\circ.$$

8. 如图， AB ， AC 分别是某圆内接正六边形、正方形的一边，若 $AB=2$ ，则 AC 的长为 _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$.

【解答】



解：设圆的圆心为 O ，连接 OA 、 OB 、 OC ，

$\because AB$ 是圆内接正六边形的一边，

$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\because OA = OB$, $\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形, $\therefore OA = AB = 2$,

$\because AC$ 是圆内接正四边形的一边, $\therefore \angle AOC = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, $\therefore AC = \sqrt{2}OA = 2\sqrt{2}$.

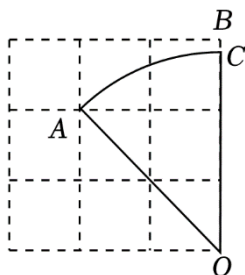
习题 L9-19: 弧长和扇形面积

参考答案与试题解析

1. 一扇形的半径为 4cm ，圆心角为 60° ，则该扇形的弧长为 _____ cm .

【答案】 $\frac{4}{3}\pi$.

2. 如图，在 3×3 的方格中，每个小方格都是边长为 1 的正方形， O ， A ， B 分别是小正方形的顶点，点 C 在 OB 上，则 AC 的长为 _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

【分析】由题意 $OA = OC = 2\sqrt{2}$ ， $\angle AOC = 45^\circ$ ， $\therefore AC$ 的长 $= \frac{45\pi \times 2\sqrt{2}}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

3. 一条弧所对的圆心角是 144° ，那么这条弧长与这条弧所在圆的周长之比为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{4}$

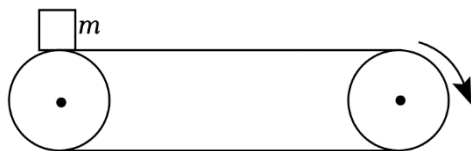
D. $\frac{2}{3}$

【答案】 B

【分析】设这条弧所在圆的半径为 r ，

则这条弧长为： $\frac{144\pi r}{180}$ ，这条弧所在圆的周长为 $2\pi r$ ， $\frac{144\pi r}{180} : 2\pi r = \frac{2}{5}$.

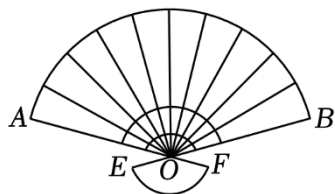
4. 如图，有一条传送带，当半径为 40 厘米的转动轮绕中心顺时针转动 90° 时，传送带上的物体 m 移动的距离是 _____ 厘米.



【答案】 20π .

【分析】传送带上的物体 A 平移的距离为半径为 40cm 的转动轮转过 90° 角的扇形的弧长，由题意， $R = 40\text{cm}$ ， $n = 90^\circ$ ，故 $l = \frac{90\pi \times 40}{180} = 20\pi(\text{cm})$.

5. 如图，已知一把扇子完全展开的圆心角为 150° ；单条扇骨 (AF, BE) 长 28cm ，其中作为扇子把手的部分 (OF, OE) 长 4cm ，求扇子外沿 AB 的弧长. (π 取 3.14)

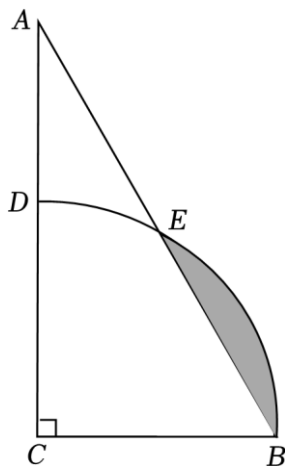


【解答】解：由题意 $AF = BE = 28\text{cm}$ ， $OE = OF = 4\text{cm}$ ，

$$\therefore OA = OB = 28 - 4 = 24(\text{cm})，\because \angle AOB = 150^\circ，$$

$$\therefore AB \text{ 的长} = \frac{150\pi \times 24}{180} = 20\pi(\text{cm}).$$

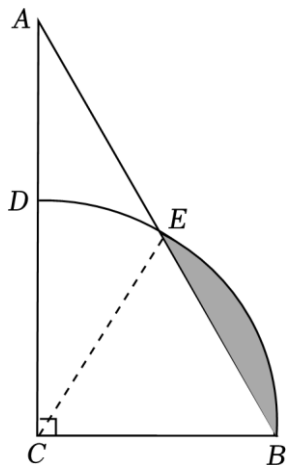
6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 3$. 以点 C 为圆心， CB 长为半径画弧，分别交 AC ， AB 于点 D 、 E ，则图中阴影部分的面积为多少（结果保留 π ）.



【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 3$.

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ，\angle ABC = 60^\circ，$$

如图，连接 CE ，



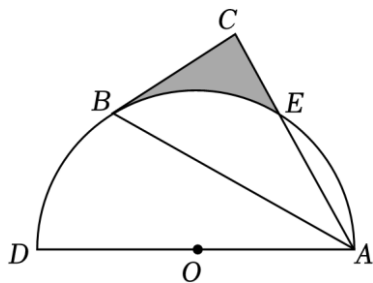
$\because CE=CB$, $\angle ABC=60^\circ$,

$\therefore \triangle BCE$ 是正三角形,

$\therefore BC=BE=CE=3$,

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形 } CBE} - S_{\triangle BCE} = \frac{60\pi \times 3^2}{360} - \frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{3\pi}{2} - \frac{9}{4}\sqrt{3}.$$

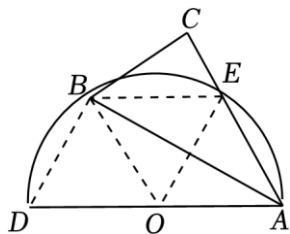
7. 如图, 点 B 、 E 是以 AD 为直径的半圆 O 的三等分点, 弧 BE 的长为 $\frac{4}{3}\pi$, $\angle C = 90^\circ$, 则图中阴影部分的面积为 ()



- A. $6\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$ B. $\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$ C. $6\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ D. $9\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$

【答案】A

【解答】



如图, 连接 BD , BE , BO , EO , 设半圆 O 的半径为 R .

$\because B, E$ 是半圆弧的三等分点,

$\therefore \angle EOA = \angle EOB = \angle BOD = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle EBA = 30^\circ$, $\therefore BE \parallel AD$,

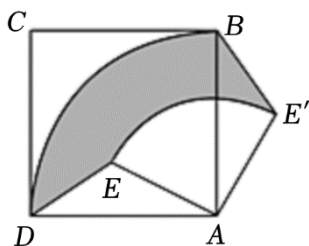
$\because$ 弧 BE 的长为 $\frac{4}{3}\pi$, 故 $\frac{60\pi \times R}{180} = \frac{4\pi}{3}$, 解得: $R = 4$,

$AB = 4\sqrt{3}$, $\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$, $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}$,

$\because \triangle BOE$ 和 $\triangle ABE$ 同底等高, $\therefore \triangle BOE$ 和 $\triangle ABE$ 面积相等,

$\therefore$ 图中阴影部分的面积为: $S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形} BOE} = 6\sqrt{3} - \frac{60\pi \times 4^2}{360} = 6\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$.

8. 如图, E 为正方形 $ABCD$ 内一点, $AD = 5$, $AE = 4$, 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 到 $\triangle ABE'$, 则边 DE 所扫过的区域 (图中阴影部分) 的面积为 _____.



【答案】 $\frac{9}{4}\pi$.

【解 答】 $S_{\text{阴}} = S_{\text{扇形} ADB} + S_{\triangle ABE'} - (S_{\triangle ADE} + S_{\text{扇形} AEE'}) = S_{\text{扇形} ADB} - S_{\text{扇形} AEE'}$
 $= \frac{90\pi \times 5^2}{360} - \frac{90\pi \times 4^2}{360} = \frac{9}{4}\pi$.

9. 圆锥的母线长为 6cm , 底面半径为 5cm , 则圆锥的侧面积是 ()

- A. $15\pi \text{ cm}^2$ B. $30\pi \text{ cm}^2$ C. $45\pi \text{ cm}^2$ D. $60\pi \text{ cm}^2$

【答案】 B

【分析】 $S = \pi rl = \pi \times 5 \times 6 = 30\pi (\text{cm}^2)$.

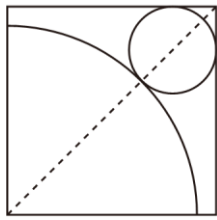
10. 一个圆锥的侧面展开图是一个半径为 16cm , 圆心角为 90° 的扇形, 则此圆锥底面圆的半径为 ()

- A. 2cm B. 3cm C. 4cm D. 6cm

【答案】 C

【分析】 底面圆的半径为 $\frac{90 \times \pi \times 16}{180} \div 2\pi = 4(\text{cm})$,

11. 如图 (1), 在正方形铁皮上剪下一个圆形和扇形, 使之恰好围成如图 (2) 所示的一个圆锥模型, 则圆的半径 r 与扇形的半径 R 之间的关系为 _____.



图(1)

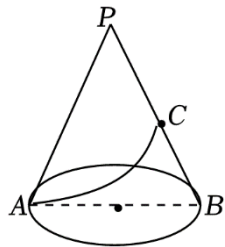


图(2)

【答案】 $R = 4r$.

【分析】由题意得： $\frac{90\pi R}{180} = 2\pi r$, 解得： $R = 4r$.

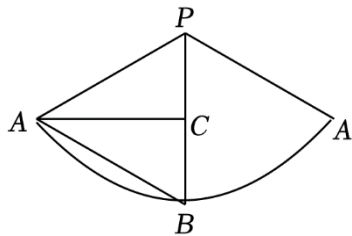
12. 已知圆锥的底面半径是 4cm , 母线长为 12cm , C 为母线 PB 的中点, 蚂蚁在圆锥侧面上从 A 爬到 C 的最短距离是 _____ .



【答案】 $6\sqrt{3}\text{cm}$.

【解答】解：圆锥的底面周长是： $2\pi \times 4 = 8\pi(\text{cm})$, 则 $8\pi = \frac{n\pi \times 12}{180}$, 解得 $n = 120$,

即圆锥侧面展开图的圆心角是 120° , 侧面展开图如图所示：



$$\therefore \angle APB = 60^\circ, \because PA = PB,$$

$\therefore \triangle PAB$ 是等边三角形,

$$\because C \text{ 是 } PB \text{ 的中点}, \therefore AC \perp PB, \therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because AP = 12\text{cm}, PC = 6\text{cm},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AP^2 - PC^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$\therefore$ 蚂蚁在圆锥侧面上从 A 爬到 C 的最短距离是： $6\sqrt{3}\text{cm}$.

习题 L9-20: 圆中最值问题

参考答案与试题解析

1. 已知 A 是 $\odot O$ 上的一个动点, P 是 $\odot O$ 所在平面内的一个定点. 若 PA 的最大值为 9, 最小值为 3, 则 $\odot O$ 的半径为()

- A. 6 B. 12 C. 3 或 6 D. 6 或 12

【答案】 C

【分析】 若点 P 在圆外, 则 $\odot O$ 的直径为 $9-3=6$, 即半径为 3;

若点 P 在圆内, 则 $\odot O$ 的直径为 $9+3=12$, 即半径为 6;

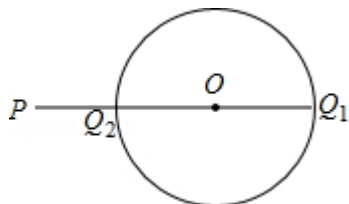
综上, $\odot O$ 的半径为 3 或 6.

2. 已知 $\odot O$ 半径为 5, $OP=8$, 点 Q 在 $\odot O$ 上运动, 设 PQ 的最大值为 m , 最小值为 n , 则 $m-n$ 的值为()

- A. 5 B. 10 C. 12 D. 8

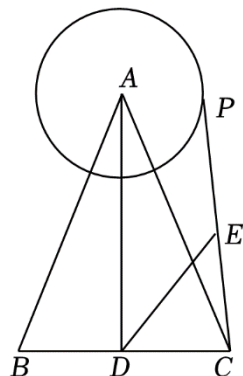
【答案】 B

【分析】



如图, $m = 8 + 5 = 13$, $n = 8 - 5 = 3$, 故 $m - n = 10$.

3. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=10$, $AD \perp BC$ 于点 D , $AD=12$, P 是半径为 4 的 $\odot A$ 上一动点, 连接 PC , 若 E 是 PC 的中点, 连接 DE , 则 DE 长的最大值为()



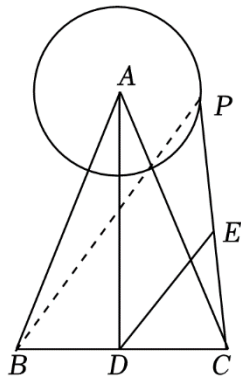
A. 8

B. 9.5

C. 9

D. 8.5

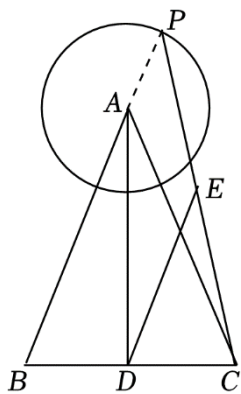
【答案】D

【解答】如图，连接 PB ，
 $\because AB = AC, AD \perp BC,$
 $\therefore CD = DB = \frac{1}{2}BC = 5,$
 $\because$ 点 E 为 PC 的中点，

 $\therefore DE$ 是 $\triangle PBC$ 的中位线，

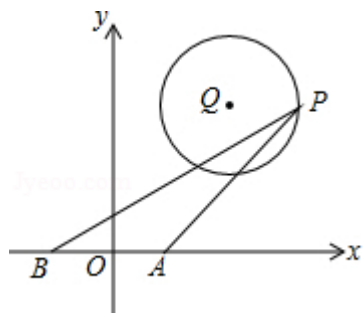
 $\therefore DE = \frac{1}{2}PB,$
 $\therefore$ 当 PB 取最大值时， DE 的长最大，

 $\because P$ 是半径为 4 的 $\odot A$ 上一动点，

 $\therefore$ 当 PB 过圆心 A 时， PB 最大，如图，

 $\because BD = 5, AD = 12,$
 $\therefore AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$
 $\because \odot A$ 的半径为 4，

 $\therefore PB$ 的最大值为 $13 + 4 = 17,$
 $\therefore DE$ 长的最大值为 8.5.

4. 如图，在平面直角坐标系中， $Q(3,4)$ ， P 是在以 Q 为圆心，2为半径的 $\odot Q$ 上一动点，设 P 点的横坐标为 x ， $A(1,0)$ 、 $B(-1,0)$ ，连接 PA 、 PB ，则 $PA^2 + PB^2$ 的最大值是()



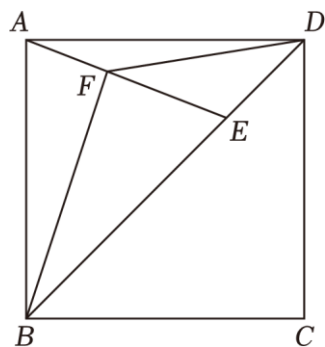
- A. 64 B. 98 C. 100 D. 124

【答案】C

【分析】设 $P(x, y)$ ，可知 $PA^2 + PB^2 = 2(x^2 + y^2) + 2$ ，又 $OP^2 = x^2 + y^2$ ，

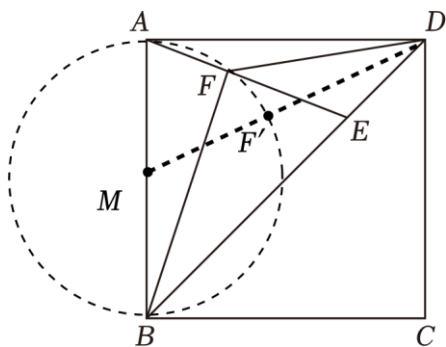
故 $PA^2 + PB^2 = 2OP^2 + 2$ ，即 OP 取最大值时 $PA^2 + PB^2$ 取到最大值， OP 最大值为 $5 + 2 = 7$ ， $PA^2 + PB^2$ 最大值为 $2 \times 7^2 + 2 = 100$ 。

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ，点 E 是对角线 BD 上的一个动点，且不与端点 B 、 D 重合。连接 AE ，过点 B 作 $BF \perp AE$ ，垂足为 F ，连接 DF 。则 DF 的最小值是_____。



【答案】 $3\sqrt{5} - 3$ 。

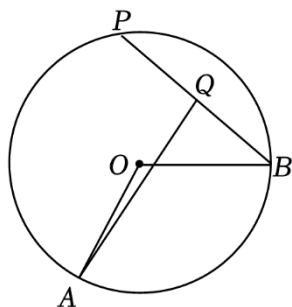
【分析】



由 $\angle AFB = 90^\circ$ 可知点 F 在以 AB 为直径的圆上. 如图, 取 AB 的中点 M , 连接 DM 与 $\odot M$ 交于点 F' , 则当点 F 在 F' 处时, DF 取得最小值.

在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 中, $DM = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$, 则 $DF' = 3\sqrt{5} - 3$. 即 DF 的最小值为 $3\sqrt{5} - 3$.

6. 如图, 已知 $\odot O$ 的半径是 8, 点 A, B 在 $\odot O$ 上, 且 $\angle AOB = 120^\circ$, 动点 P 在 $\odot O$ 上运动 (不与 A, B 重合), 点 Q 为线段 BP 的中点, 连接 AQ , 则线段 AQ 长度的最小值是 _____.



【答案】 $4\sqrt{7} - 4$.

【分析】

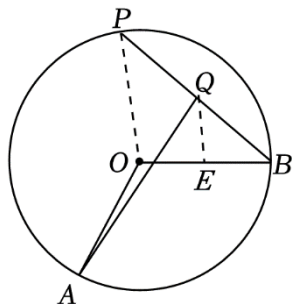


图1

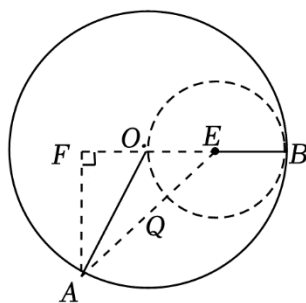


图2

如图 1, 取 OB 的中点 E , 连接 QE , OP , QE 为 $\triangle BOP$ 的中位线, 则

$QE = \frac{1}{2}OP = 4$ ，可知点 Q 的轨迹为点 E 为圆心，4 为半径的圆，如图 2，作 $AF \perp OB$ 交 BO 的延长线于点 F ，当点 Q 位于线段 AE 与 $\odot E$ 的交点时， AQ 取最小值， $\angle OAF = \angle AOB - \angle F = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ ， $OF = \frac{1}{2}OA = 4$ ，故 $AF = \sqrt{OA^2 - OF^2} = 4\sqrt{3}$ 。在 $Rt\triangle EFA$ 中， $EF = OF + OE = 8$ ， $AF = 4\sqrt{3}$ ，则 $AE = 4\sqrt{7}$ ， $AQ = 4\sqrt{7} - 4$ ，即线段 AQ 长度的最小值是 $4\sqrt{7} - 4$ 。

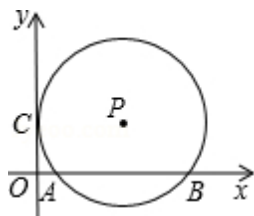
7. 在同一平面内，已知 $\odot O$ 的半径为 4，圆心 O 到直线 l 的距离为 6， P 为圆上的一个动点，则点 P 到直线 l 的距离不可能是()

- A. 2 B. 6 C. 10 D. 14

【答案】D

【分析】点 P 到直线 l 的距离 $2 \leq d \leq 10$ 。

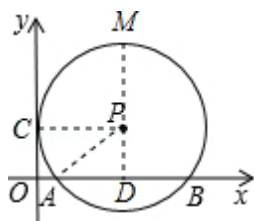
8. 如图，在平面直角坐标系中， $\odot P$ 与 y 轴相切于点 C ，与 x 轴相交于 A ， B 两点，若点 P 的坐标为 $(5,3)$ ，点 M 是 $\odot P$ 上的一动点，则 $\triangle ABM$ 面积的最大值为()



- A. 64 B. 48 C. 32 D. 24

【答案】C

【分析】



如图，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，连接 PC ， PA ，

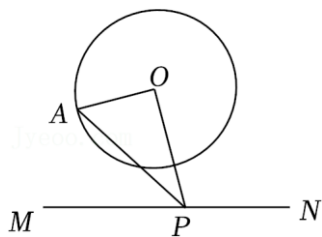
$\because$ 点 P 的坐标为 $(5,3)$ ， $\because \odot P$ 与 y 轴相切于点 C ， $\therefore PC = 5$ ， $PD = 3$ ，

$$\therefore PA = PC = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中, $AD = \sqrt{PA^2 - PD^2} = 4$, $\because PD \perp AB$, $\therefore AB = 2AD = 8$,

当点 $M(3,8)$ 时, $\triangle ABM$ 面积最大, 最大值为: $\frac{1}{2}AB \cdot MD = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$.

9. 点 A 是半径为 2 的 $\odot O$ 上一动点, 点 O 到直线 MN 的距离为 3. 点 P 是 MN 上一个动点. 在运动过程中若 $\angle POA = 90^\circ$, 则线段 PA 的最小值是 _____.



【答案】 $\sqrt{13}$.

【分析】 $\because \angle POA = 90^\circ$,

$\therefore PA = \sqrt{OA^2 + OP^2} = \sqrt{4 + OP^2}$, 当 OP 最小时, PA 取最小值,

由题意得: 当 $OP \perp MN$ 时, OP 最小, 最小值为 3,

$\therefore PA$ 的最小值为: $\sqrt{4 + 3^2} = \sqrt{13}$.