

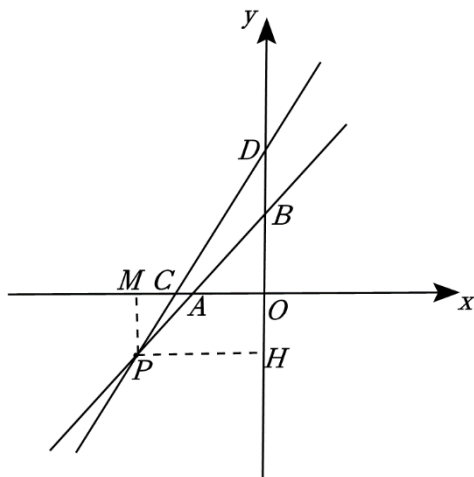
L8 拓展篇第 10 讲——一次函数（三）

参考答案与试题解析

1. 已知 m 是整数，且 $m \geq 2$ ，由直线 $y = mx + 2m - 1$ 和直线 $y = (m+1)x + 2m + 1$ 与 x 轴及 y 轴所围成的图形面积为 s ，则 s 关于 m 的解析式为_____.

【答案】 $S = \frac{4m^2 + 4m - 1}{2m^2 + 2m}, (m \geq 2).$

【分析】



解：作 $PH \perp y$ 轴于 H ，作 $PM \perp x$ 轴于 M ，

$$\because y = mx + 2m - 1 = m(x+2) - 1, \quad y = (m+1)x + 2m + 1 = (m+1)(x+2) - 1,$$

$\therefore$ 两直线都过 $P(-2, -1)$.

$\because$ 直线 $y = mx + 2m - 1$ 交坐标轴于 A, B ,

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 2m - 1, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } x = \frac{1-2m}{m},$$

$$\therefore A \text{ 的坐标是 } (\frac{1-2m}{m}, 0), B \text{ 的坐标是 } (0, 2m-1),$$

$$\therefore OA = \frac{2m-1}{m}, OB = 2m-1,$$

$\because$ 直线 $y = (m+1)x + 2m + 1$ 交坐标轴于 C, D ,

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 2m + 1, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } x = \frac{-2m-1}{m+1},$$

$$\therefore C \text{ 的坐标是 } (\frac{-2m-1}{m+1}, 0), D \text{ 的坐标是 } (0, 2m+1),$$

$$\therefore OC = \frac{2m+1}{m+1}, \quad OD = 2m+1,$$

$$\therefore BD = OD - OB = 2, \quad CA = OC - OA = \frac{1}{m^2+m},$$

$$\therefore S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} BD \cdot PH = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, \quad S_{\triangle PCA} = \frac{1}{2} AC \cdot PM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{m^2+m} \times 1 = \frac{1}{2(m^2+m)},$$

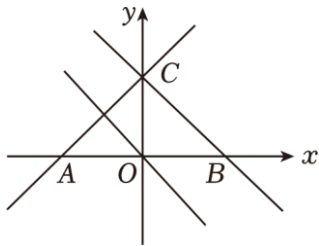
$$\therefore S_{ABDC} = S_{\triangle PBD} - S_{\triangle PCA} = 2 - \frac{1}{2(m^2+m)} = \frac{4m^2+4m-1}{2m^2+2m}, \quad (m \geq 2).$$

2. 如图，直线 $y = x + 3$ 与坐标轴分别交于点 A ， C ，直线 BC 与直线 AC 关于 y 轴对称。

(1) 求直线 BC 的解析式。

(2) 若点 $P(m, 2)$ 在 $\triangle ABC$ 的内部，求 m 的取值范围。

(3) 若过点 O 的直线 L 将 $\triangle ABC$ 分成的两部分的面积比为 $1:3$ ，直接写出 L 的解析式。



【答案】 (1) $y = -x + 3$; (2) $-1 < m < 1$; (3) $y = x$ 或 $y = -x$.

【分析】 (1) 求出 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，由直线 BC 与直线 AC 关于 y 轴对称，得 $B(3, 0)$ ，可得直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$ ；

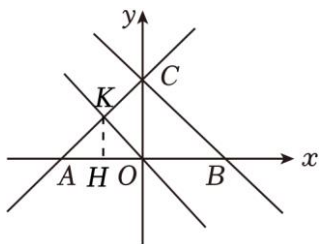
(2) 当点 P 在直线 CA 上时， $m + 3 = 2$ ，解得 $m = -1$ ，

当点 P 在直线 BC 上时， $-m + 3 = 2$ ，解得 $m = 1$ ，

$\therefore$ 当点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部时， m 的取值范围是 $-1 < m < 1$ ；

(3) 求出 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ ；分两种情况：

① 设直线 L 交 AC 于 K ， $S_{\triangle AOK} : S_{\text{四边形}KBOC} = 1:3$ ，过 K 作 $KH \perp AB$ 于 H ，如图：



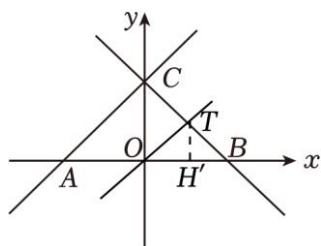
$$\therefore S_{\triangle AOK} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times KH = \frac{9}{4}, \therefore KH = \frac{3}{2},$$

在 $y = x + 3$ 中, 令 $y = \frac{3}{2}$ 得 $x = -\frac{3}{2}$,

$\therefore K(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 可求得 L 解析式为 $y = -x$;

② 设直线 L 交 BC 于 T , $S_{\triangle BOT} : S_{\text{四边形}AOTC} = 1:3$, 过 T 作 $TH' \perp AB$ 于 H' , 如图:



同理可得直线 L 解析式为 $y = x$;

综上所述, 直线 L 的解析式为 $y = x$ 或 $y = -x$.

3. 在直角坐标系中, 已知四个点为 $A(-8,3)$ 、 $B(-4,5)$ 、 $C(0,n)$ 、 $D(m,0)$, 当四边形 $ABCD$ 的周长最短时, 求 $m:n$ 的值.

【答案】 $-\frac{3}{2}$.

【分析】 作 A 关于 x 轴的对称点 A' , B 关于 y 轴的对称点 B' , 当 C 、 D 、 A' 、 B' 四点共线时符合题意. 求得直线 $A'B'$ 解析式为 $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, 继而求得 $m = -\frac{7}{2}$, $n = \frac{7}{3}$, $m:n = -\frac{3}{2}$.

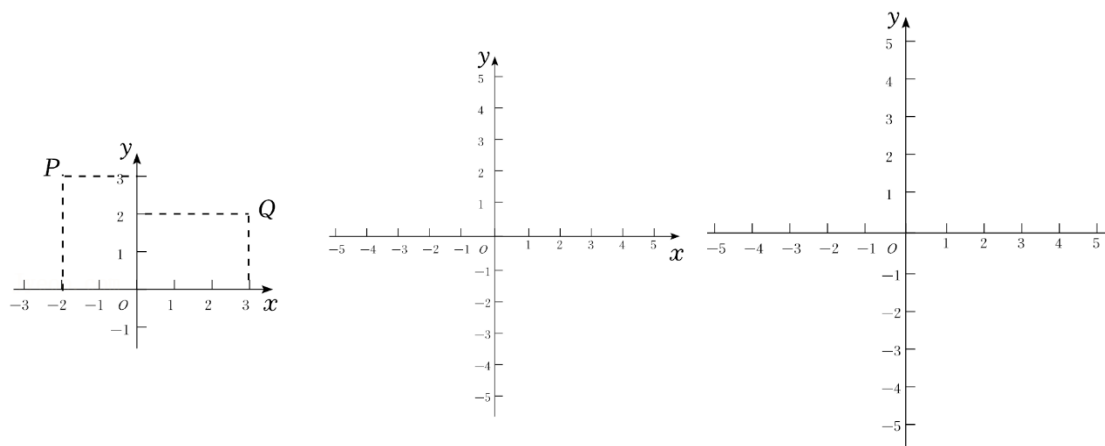
4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于 P , Q 两点给出如下定义: 若点 P 到两坐标轴的距离之和等于点 Q 到两坐标轴的距离之和, 则称 P , Q 两点为同族点. 如图 P , Q 两点即为同族点.

(1) 已知点 A 的坐标为 $(-3,1)$, 点 B 在 x 轴上, 且 A , B 两点为同族点, 则点 B 的坐标为 _____;

(2) 直线 $l: y = x - 3$, 与 x 轴交于点 C , 与 y 轴交于点 D ,

M 为线段 CD 上一点, 若在直线 $x = n$ 上存在点 N , 使得 M , N 两点为同族点,

求 n 的取值范围；



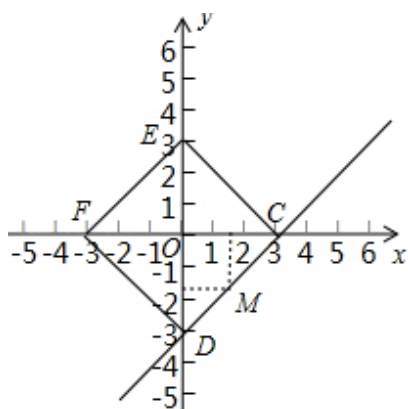
备用图

备用图

【答案】(1) $(-4, 0)$ 或 $(4, 0)$ ；(2) $-3 \leq n \leq 3$ 。

【分析】(1) $(-4, 0)$ 或 $(4, 0)$ ；

(2) 由题意，直线 $y = x - 3$ 与 x 轴交于 $C(3, 0)$ ，与 y 轴交于 $D(0, -3)$ 。



点 M 在线段 CD 上，设其坐标为 (x, y) ，

则有： $x \geq 0$ ， $y \leq 0$ ， $y = x - 3$ 。

点 M 到 x 轴的距离为 $|y|$ ，点 M 到 y 轴的距离为 $|x|$ ，则 $|x| + |y| = x - y = 3$ 。

$\therefore$ 点 M 的同族点 N 满足横纵坐标的绝对值之和为 3。

即点 N 在右图中所示的正方形 $CDFE$ 上。

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(-3, 0)$ ，点 N 在直线 $x = n$ 上，

$\therefore -3 \leq n \leq 3$ ；

5. 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 把直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 沿过点 A 的直线翻折, 使点 B 与 x 轴上的点 C 重合, 折痕与 y 轴交于点 D , 求直线 CD 的解析式.

【答案】 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 或 $y = \frac{3}{4}x - 12$.

【分析】 易知 $AB = 10$, 则 $AC = 10$, 则 C 点坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(16, 0)$, 又 $BD = CD$, 则 D 点坐标为 $(0, 3)$ 或 $(0, -12)$, 继而求出直线 CD 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 或 $y = \frac{3}{4}x - 12$.