

2.5 与角分线相关的动点问题



钻石级别

【例 1】在平面直角坐标系中，点 $A(-5,0)$ ， $B(0,5)$ ，点 C 为 x 轴正半轴上一动点，过点 A 作 $AD \perp BC$ 交 y 轴于点 E 。

(1) 如图①，若点 C 的坐标为 $(3,0)$ ，试求点 E 的坐标；

(2) 如图②，若点 C 在 x 轴正半轴上运动，且 $OC < 5$ ，其它条件不变，连接 DO ，求证： OD 平分 $\angle ADC$

(3) 若点 C 在 x 轴正半轴上运动，当 $\angle OCB = 2\angle DAO$ 时，试探索线段 AD 、 OC 、 DC 的数量关系，并证明。

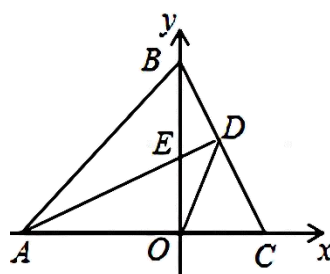


图 1

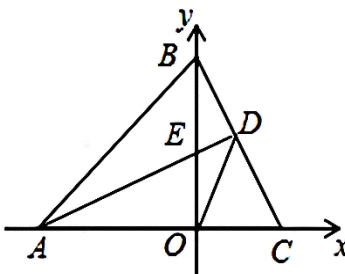
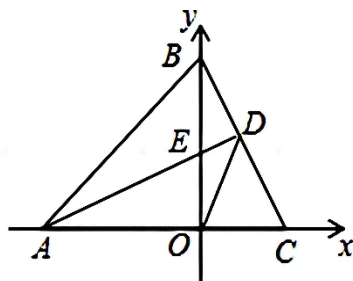


图 2



备用

【答案】(1) $(0, 3)$ ；(2) 详见解析；(3) $AD = OC + CD$

【解析】(1) 如图①， $\because AD \perp BC$ ， $BO \perp AO$ ， $\therefore \angle AOE = \angle BDE$ ，

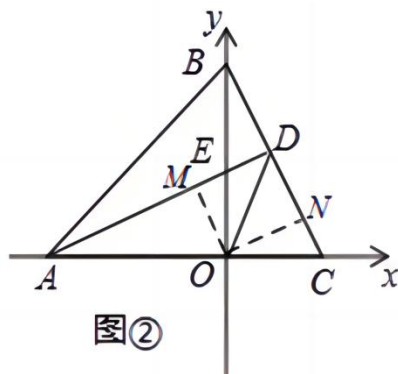
又 $\because \angle AEO = \angle BED$ ， $\therefore \angle OAE = \angle OBC$ ，

$\because A(-5, 0)$ ， $B(0, 5)$ ， $\therefore OA = OB = 5$ ，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOC$ ， $\therefore OE = OC$ ，

又 $\because$ 点 C 的坐标为 $(3, 0)$ ， $\therefore OC = 3 = OE$ ， $\therefore$ 点 E 的坐标为 $(0, 3)$ ；

(2) 如图②，过点 O 作 $OM \perp AD$ 于点 M ，作 $ON \perp BC$ 于点 N ，

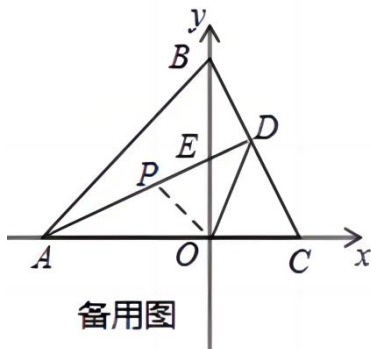


图②

$\because \triangle AOE \cong \triangle BOC$ ， $\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle BOC}$ ，且 $AE = BC$ ，

$\because OM \perp AE, ON \perp BC, \therefore OM = ON, \therefore OD$ 平分 $\angle ADC$;

(3) 如所示, 在 DA 上截取 $DP = DC$, 连接 OP ,



$\because \angle OCB = 2\angle DAO, \angle ADC = 90^\circ, \therefore \angle PAO + \angle OCD = 90^\circ,$

$\therefore \angle DAC = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ, \angle DCA = \frac{2 \times 90^\circ}{3} = 60^\circ$

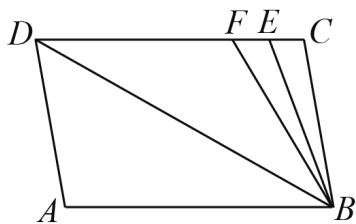
$\because \angle PDO = \angle CDO, OD = OD, \therefore \triangle OPD \cong \triangle OCD,$

$\therefore OC = OP, \angle OPD = \angle OCD = 60^\circ,$

$\therefore \angle POA = \angle PAO = 30^\circ, \therefore PA = PO = OC,$

$\therefore AD = PA + PD = OC + CD, \text{即: } AD = OC + CD.$

【例2】如图, 已知直线 $AB \parallel CD, \angle A = \angle C = 100^\circ, E, F$ 在 CD 上, 且满足 $\angle DBF = \angle ABD, BE$ 平分 $\angle CBF$.



(1) 求 $\angle DBE$ 的度数.

(2) 若平行移动 AD , 那么 $\angle BFC : \angle BDC$ 的比值是否随之发生变化? 若变化, 找出变化规律;

若不变, 求出这个值.

(3) 在平行移动 AD 的过程中, 是否存在某种情况, 使 $\angle BEC = \angle ADB$? 若存在, 求出 $\angle BEC$ 度数;

若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 40° ; (2) $2:1$; (3) 存在, 且 $\angle BEC = 60^\circ$.

【解析】 (1) $\because AB \parallel CD, \therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ, \therefore \angle ABC = 80^\circ,$

又 $\because BE$ 平分 $\angle CBF, \therefore \angle CBE = \angle EBF, \text{ 又 } \because \angle DBF = \angle DBA,$

$\therefore \angle DBE = \angle DBF + \angle EBF = \frac{1}{2} \angle ABC = 40^\circ.$

(2) $\because \angle ABD = \angle DBF$, 又 $\because AB \parallel CD$, $\angle ABD = \angle BDF$,

$\therefore \angle DBF = \angle BDF$, 又 $\because \angle BFC = \angle BDC + \angle DBF = 2\angle BDC$,

$\therefore \angle BFC : \angle BDC = 2 : 1$.

(3) 在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle CEB$ 中,

$\angle A = \angle C = 100^\circ$, $\angle CEB = \angle ADB$, $\therefore \angle ABD = \angle CBE$,

$\because BE$ 平分 $\angle CBF$, $\therefore \angle CBE = \angle EBF$,

又 $\because \angle ABD = \angle FBD$,

$\therefore \angle ABD = \angle FBD = \angle EBF = \angle CBE = \frac{1}{4} \angle ABC = 20^\circ$,

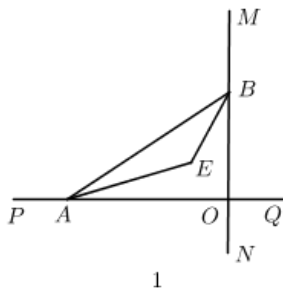
$\therefore \angle BEC = 180^\circ - \angle C - \angle EBC = 60^\circ$.



王者级别

【例3】如图, 直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于点 O , 点 A 在直线 PQ 上运动, 点 B 在直线 MN 上运动.

- (1) 如图1, 已知 AE , BE 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 的角平分线, 点 A , B 在运动的过程中, $\angle AEB$ 的大小是否会发生变化? 若发生变化, 请说明变化的情况; 若不发生变化, 请说明理由, 并求出 $\angle AEB$ 的大小.

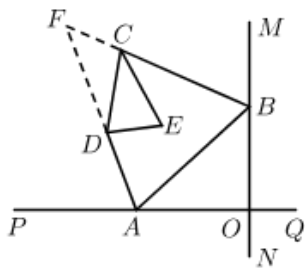


- (2) 如图2, 已知 AB 不平行 CD , AD , BC 分别是 $\angle BAP$ 和 $\angle ABM$ 的角平分线, AD , BC 的延长线交于点 F , $\angle ADC$ 的角平分线 DE 和 $\angle BCD$ 的角平分线 CE 相交于点 E .

- ① 点 A , B 在运动的过程中, $\angle F$ 的大小是否会发生变化? 若发生变化, 请说明变化的情况; 若不发生变化, 请说明理由.

- ② 点 A , B 在运动的过程中, $\angle CED$ 的大小是否会发生变化? 若发生变化, 请说明变化的情况; 若不

发生变化，请说明理由.



2

【答案】 (1) $\angle AEB$ 的大小不变, $\angle AEB = 135^\circ$. 证明见解析.

(2) $\angle F$ 的大小不变, 证明见解析. (3) $\angle CED$ 的大小不变, 证明见解析.

【解析】 (1) $\angle AEB$ 的大小不变, 理由如下:

$\therefore$ 直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于点 O ,

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \therefore \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ,$$

$\because AE, BE$ 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 的角平分线,

$$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle OAB, \quad \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABO,$$
$$\therefore \angle BAE + \angle ABE = \frac{1}{2}(\angle OAB + \angle ABO) = 45^\circ, \therefore \angle AEB = 135^\circ.$$

(2) $\angle F$ 的大小不变, 理由如下:

$\because$ 直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于点 O , $\therefore \angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ, \therefore \angle PAB + \angle MBA = 270^\circ,$$

$\because AD, BC$ 分别是 $\angle BAP$ 和 $\angle ABM$ 的角平分线,

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAP, \quad \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ABM,$$
$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = \frac{1}{2}(\angle BAP + \angle ABM) = 135^\circ, \therefore \angle F = 45^\circ.$$

(3) $\angle CED$ 的大小不变, 理由如下:

$$\because \angle F = 45^\circ, \therefore \angle FDC + \angle FCD = 135^\circ,$$
$$\therefore \angle CDA + \angle DCB = 225^\circ,$$

$\because DE, CE$ 分别是 $\angle ADC$ 和 $\angle BCD$ 的角平分线,

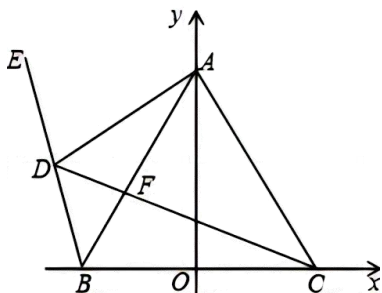
$$\therefore \angle CDE + \angle DCE = 112.5^\circ, \therefore \angle CED = 67.5^\circ.$$

【例 4】 如图, 已知 $B(-1,0), C(1,0)$, A 为 y 轴正半轴上一点, $AB=AC$, 点 D 为第二象限一动点, E 在 BD 的延长线上, CD 交 AB 于 F , 且 $\angle BDC = \angle BAC$.

(1) 求证: $\angle ABD = \angle ACD$;

(2) 求证: AD 平分 $\angle CDE$;

(3) 若在 D 点运动的过程中, 始终有 $DC = DA + DB$, 在此过程中, $\angle BAC$ 的度数是否变化? 如果变化, 请说明理由; 如果不变, 请求出 $\angle BAC$ 的度数?

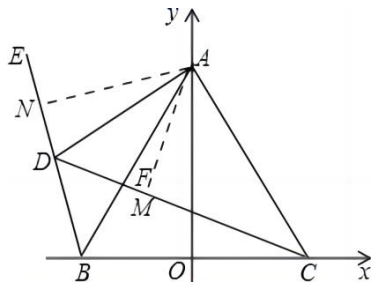


【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析; (3) $\angle BAC$ 的度数不变化. $\angle BAC = 60^\circ$.

【解析】 (1) $\because \angle BDC = \angle BAC, \angle DFB = \angle AFC$,

又 $\because \angle ABD + \angle BDC + \angle DFB = \angle BAC + \angle ACD + \angle AFC = 180^\circ, \therefore \angle ABD = \angle ACD$;

(2) 过点 A 作 $AM \perp CD$ 于点 M , 作 $AN \perp BE$ 于点 N .

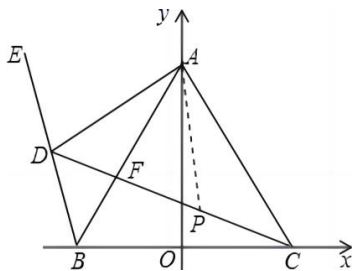


则 $\angle AMC = \angle ANB = 90^\circ$. $\because OB = OC, OA \perp BC, \therefore AB = AC$,

$\because \angle ABD = \angle ACD, \therefore \triangle ACM \cong \triangle ABN$ (AAS) $\therefore AM = AN$.

$\therefore AD$ 平分 $\angle CDE$. (到角的两边距离相等的点在角的平分线上);

(3) $\angle BAC$ 的度数不变化, 在 CD 上截取 $CP = BD$, 连接 AP .



$$\because CD=AD+BD, \therefore AD=PD.$$

$$\because AB=AC, \angle ABD=\angle ACD, BD=CP,$$

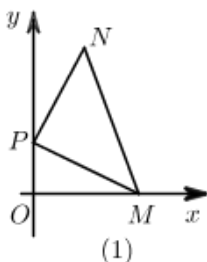
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACP. \therefore AD=AP;$$

$$\angle BAD=\angle CAP. \therefore AD=AP=PD, \text{即} \triangle ADP \text{是等边三角形},$$

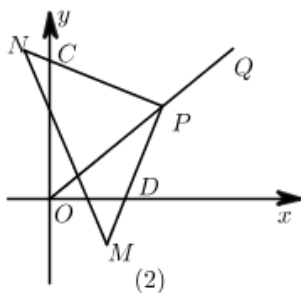
$$\therefore \angle DAP=60^\circ. \therefore \angle BAC=\angle BAP+\angle CAP=\angle BAP+\angle BAD=60^\circ.$$

【例 5】 回答下列问题：

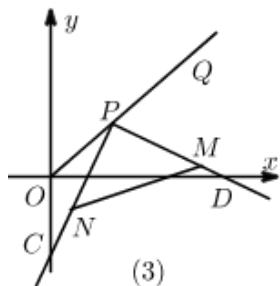
(1) 已知，将一个三角板 PMN ($PM=PN$) 的直角顶点 P 如图 (1) 所示放在平面直角坐标系的 y 轴上，已知点 P 的坐标为 $(0,1)$ ， $M(3,0)$ ，求点 N 的坐标。



(2) OQ 是第一象限角 $\angle xOy$ 的平分线，将三角板的直角顶点 P 在射线 OQ 上滑动，如图 (2) 所示，两直角边分别与 x 轴、 y 轴交于 D 、 C ，请猜想 PC 和 PD 有怎样的数量关系，并证明你的结论。

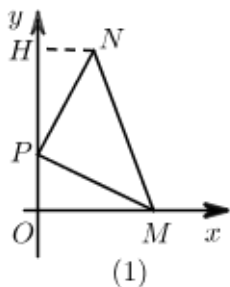


(3) OQ 是第一象限角 $\angle xOy$ 的平分线，将三角板的直角顶点 P 在射线 OQ 上转动，如图 (3) 所示，两直角边的延长线分别与 x 轴、 y 轴交于 D 、 C 。请你直接写出 NC 和 MD 有怎样的数量关系。



【答案】 (1) 点 N 的坐标为 $(1,4)$. (2) $PC=PD$. 证明见解析. (3) $NC=MD$.

【解析】 (1) 如图 (1)，作 $NH \perp y$ 轴于 H ，

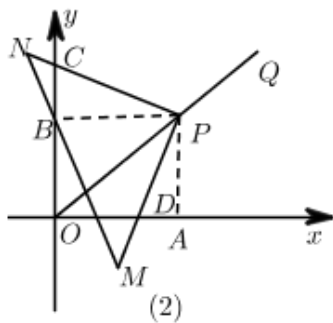


则 $\angle NPH + \angle PNH = 90^\circ$, $\therefore \angle NPM = 90^\circ$,
 $\therefore \angle NPH + \angle MPO = 90^\circ$, $\therefore \angle PNH = \angle MPO$,

在 $\triangle PNH$ 和 $\triangle MPO$ 中,
$$\begin{cases} \angle PNH = \angle MPO \\ \angle PHN = \angle MOP, \\ PN = MP \end{cases}$$

$\therefore \triangle PNH \cong \triangle MPO$ (AAS), $\therefore HN = OP = 1$, $PH = OM = 3$,
 $\therefore OH = OP + PH = 4$, $\therefore$ 点 N 的坐标为 $(1, 4)$.

(2) 如图 (2) 作 $PA \perp x$ 轴于 A , $PB \perp y$ 轴于 B ,

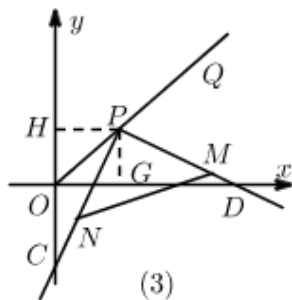


则四边形 $OAPB$ 为矩形, $\therefore \angle APB = 90^\circ$, $\angle APM + \angle BPM = 90^\circ$,
 $\because \angle NPM = 90^\circ$, $\therefore \angle BPN + \angle BPM = 90^\circ$, $\therefore \angle BPN = \angle APM$,
 $\because OP$ 平分 $\angle xOy$, $PA \perp x$ 轴, $PB \perp y$ 轴, $\therefore PA = PB$,

在 $\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$ 中,
$$\begin{cases} \angle APD = \angle BPC \\ PA = PB \\ \angle PAD = \angle PBC \end{cases}$$

$\therefore \triangle APD \cong \triangle BPC$ (ASA), $\therefore PC = PD$.

(3) 如图 (3) 作 $PG \perp x$ 轴于 G , $PH \perp y$ 轴于 H ,



由 (2) 可得, $\triangle GPD \cong \triangle HPC$, $\therefore PC = PD$, $\because PN = PM$, $\therefore NC = MD$.