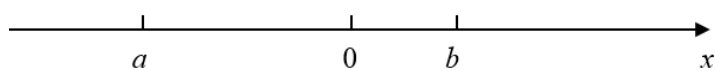


L7 - 拓展篇第 1 讲 - 绝对值

例 1: 已知 $x < -3$, 化简 $|3 + |2 - |1 + x|||$ 。

例 2: 如图, 化简 $|a + b| + |b - a| + |b| - |a - |a||$ 。



例 3: 求 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|}$ 的所有可能取值。

例 4: 设 a 、 b 、 c 均为整数, 且 $|a-b|^{19} + |c-a|^{99} = 1$, 求 $|c-a| + |a-b| + |b-c|$ 的值。

例 5: 解方程 $|2x-3| = 2$ 。

例 6: 解方程 $|x-1| = 2x$ 。

例 7: 解方程 $|2x-3| = |7-3x|$ 。

例 8: 化简 $|x - 2| + |x - 3|$ ，并求出 x 变化时，原式的最小值。

例 9: 求 $|x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$ 的最小值。

例 10: 设 $a < b < c < d$ ，求 $|x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$ 的最小值。

例 11: 已知 a 、 b 是两个给定的正数，若 x 在某一特定范围 $a \leq x \leq b$ 内任意变动时，都有 $|1 - 2x| + |1 - 3x| + |1 - 5x|$ 的值恒为常数，求这个常数的值。

L7 - 拓展篇第 2 讲 - 有理数运算

例 1: 计算: $2023 \times 20242024 - 2024 \times 20232023$ 。

例 2: 计算: $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2023})(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2022}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2023})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2022})$

例 3: 在 1、2、...、2022 前面任意添上正号或负号, 非负和的最小值是多少?

例 4: 计算:

- (1) $\frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{108} + \frac{1}{180} + \frac{1}{270} + \frac{1}{378} + \frac{1}{504} + \frac{1}{648} + \frac{1}{810} + \frac{1}{990}$;
- (2) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}$ 。

例 5: (1) 计算以下三个繁分数:

$$\textcircled{1} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}; \quad \textcircled{2} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}}; \quad \textcircled{3} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}}};$$

(2) 将 (1) 中的繁分数改为共有 2023 个减号, 答案是多少?

例 6: 为了求 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2023}$ 的值, 可令 $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2023}$, 则 $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2023} + 2^{2024}$, 两式相减, 可得 $2S - S = 2^{2024} - 1$, 也即 $S = 2^{2024} - 1$ 。仿照这个做法, 求 $1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + \cdots + (\frac{1}{3})^{2023}$ 的值。

例 7: 设 $a = \frac{11 \times 66 + 12 \times 67 + 13 \times 68 + 14 \times 69 + 15 \times 70}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \times 100$, 求 a 的整数部分。

L7 - 拓展篇第 3 讲 - 一元一次方程

例 1: 足球大多是由许多小黑白块的皮缝合而成的。如图, 若已知黑块共 12 块, 白块有多少块?



例 2: 已知关于 x 的方程 $9x - 3 = kx + 14$ 有整数解, 求整数 k 的值。

例 3: 解关于 x 的方程: $ax = b$ 。

例 4: 解关于 x 的方程: $ax + b = -x - 2$ 。

例 5: 已知关于 x 的方程 $a(2x + 3) + 3bx = 12x + 5$ 有无穷多个解, 求 a, b 的值。

例 6: 解关于 x 的方程: $(a + x - b)(a - b - x) = (a^2 - x)(b^2 + x) - a^2b^2$ 。

例 7: 已知 a 为正整数, 且关于 x 的方程 $\frac{5}{2}x - a = \frac{8}{5}x + 142$ 的解也为正整数, 求 a 的最小值。

例 8: 已知 $a - b = 7$, 且 $ax + 2 \neq 0$, 若不论 x 取何值, 代数式 $\frac{bx-5}{ax+2}$ 的值恒为常数, 求 a, b 的值。

L7 - 拓展篇第 4 讲 - 绝对值方程

例 1: 解方程: $|3x - |1 - 2x|| = 2$ 。

例 2: 解方程 $|x + 1| + |x + 9| = 8$ 。

例 3: 解关于 x 的方程 $|x - 1| + |x - 2| = a$ 。

例 4: 已知关于 x 的方程 $|x| = ax + 1$ 有一个负根，并且没有正根，求 a 的取值范围。

例 5: 已知关于 x 的方程 $||x - a| - b| = 3$ 有三个不相等的解, 求 b 的值。

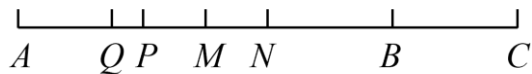
例 6: 设 $t = \frac{a+b}{|a+b|} + \frac{b-a}{|b-a|} + \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$, 若关于 x 的方程 $||x - 2| - b| = a$ 有四个不相等的解, 求 t 的值。

例 7: 若关于 x 的方程 $|x - 100| + |x - t| = a$ 有 50 个不相等的整数解, 求 t 的取值范围。

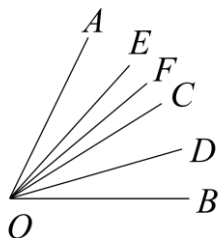
@胡小群讲数学

L7 - 拓展篇第 5 讲 - 线与角

例 1: 如图, 已知点 M, N, P, Q 分别为线段 AB, AC, NA, MA 的中点, 求 $MN:PQ$ 的值。



例 2: 如图, 射线 OC, OD, OE, OF 分别平分 $\angle AOB, \angle COB, \angle AOC, \angle EOC$, 若 $\angle FOD = 24^\circ$, 求 $\angle AOB$ 的度数。



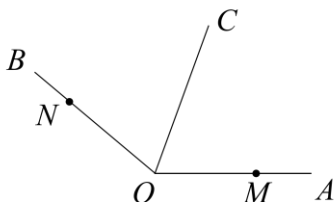
例 3: A, B, C, D 四点在数轴上对应的点分别是 $5, 9, -6, -8$ 。

(1) 若线段 CD 以每秒 3 个单位的速度向右匀速运动, 从线段 CD 与线段 AB 有重叠部分开始, 经过几秒之后, 这两条线段不再有重叠部分?

(2) 若线段 AB, CD 同时开始移动, 线段 AB 以每秒 2 个单位的速度向左匀速运动, 线段 CD 以每秒 3 个单位的速度向右匀速运动, 点 P, Q 分别是线段 CD, AB 的中点, 运动几秒时, 点 P 与点 Q 的距离是一个单位?

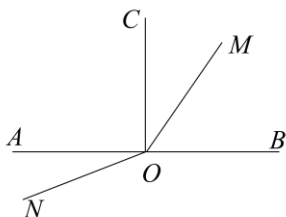
例 4: A, B, C, D 四点在数轴上对应的点分别是 a, b, c, d ，且 a, b 是方程 $|x + 7| = 1$ 的两个解，其中 $a < b$ ， $(c - 12)^2$ 与 $|d - 16|$ 互为相反数，若线段 AB 以 3 个单位/秒的速度向右匀速运动，线段 CD 以 1 个单位/秒的速度向左匀速运动，已知运动 t 秒后， A, B 两点都在线段 CD 上且不与线段 CD 端点重合，且有 $BD = 2AC$ ，求 t 的值。

例 5: 如图， $\angle AOB = 140^\circ$ ， M, N 分别是 OA, OB 上的点，线段 OM, ON 同时开始旋转， OM 以 30 度/秒的速度绕点 O 逆时针旋转， ON 以 10 度/秒的速度绕点 O 顺时针旋转，当 OM 旋转到与 OB 重合时，两条线段都停止旋转。



- (1) 旋转 2 秒和 4 秒时， $\angle MON$ 的度数分别是多少？
- (2) 若 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，旋转几秒时， $\angle NOB$ 和 $\angle COM$ 中的一个角是另一个角的两倍？

例 6：如图，点 O 为直线 AB 上一点， $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$ ，射线 OM 从 OC 出发绕点 O 以每分钟 18° 的速度顺时针旋转一周，同时射线 ON 从 OA 出发绕点 O 逆时针方向以每分钟 12° 的速度旋转，当 OM 停止旋转时， ON 也随之停止。（本题所有角均指小于 180° 的角）



- (1) 旋转 2 分钟时，求 $\angle MON$ ；
- (2) 当 $\angle AON = 2\angle BOM - 30^\circ$ 时，旋转了几分钟？

例 7：在一条直线上作 n 个不同的点，这些点为端点的线段共有多少条？

例 8: 同一平面内有 n 条不同的直线, 它们两两相交, 最少有几个交点? 最多有几个交点?

例 9: 同一平面内 n 条不同的直线最多把平面分成几个部分?

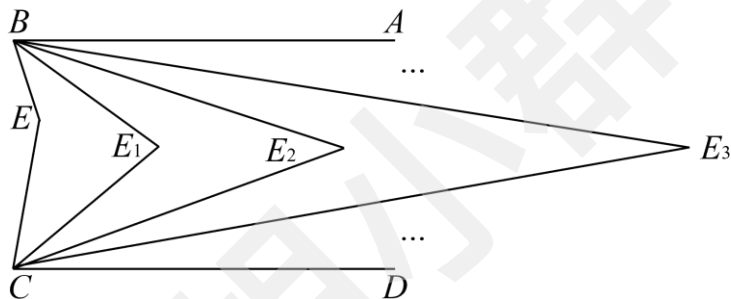
L7 - 拓展篇第 6 讲 - 平行线

例 1：平面上有 5 条直线，其中任意两条都不平行，求证：在这五条直线两两相交所成的角中，至少有一个角不超过 36° 。

例 2：在同一平面内，请作出 10 条直线，使得这 10 条直线共有 31 个交点，且没有任何三条直线交于一点。

例 3: 平面上 n 条直线中, 每条恰与另外的 37 条相交, 求 n 的值。

例 4: 如图, 已知 $AB \parallel CD$, CE, BE 交于点 E , 作 $\angle ABE$ 和 $\angle DCE$ 的平分线, 交于点 E_1 ; 再作 $\angle ABE_1$ 和 $\angle DCE_1$ 的平分线, 交于点 E_2 ; 再作 $\angle ABE_2$ 和 $\angle DCE_2$ 的平分线, 交于点 E_3 ; ……持续这个操作, 直到作 $\angle ABE_{n-1}$ 和 $\angle DCE_{n-1}$ 的平分线, 交于点 E_n 。已知 $\angle E_n = \alpha^\circ$, 求 $\angle BEC$ 的度数。



例 5: 已知 $AB \parallel CD$, 点 M, N 分别在直线 AB, CD 上, E 为平面内一点。

(1) 如图 1, 设 $\angle BME = m^\circ$, EF, NP 分别是 $\angle MEN, \angle END$ 的平分线, $EQ \parallel NP$, 求 $\angle FEQ$ 的度数 (用含 m 的式子表示);

(2) 如图 2, G 为 CD 上一点, $\angle BMN = n \cdot \angle EMN$, $\angle GEK = n \cdot \angle GEM$, 直线 $EH \parallel MN$ 交 AB 于点 H , 求证: $n\angle GEH = \angle GEK - \angle BMN$ 。

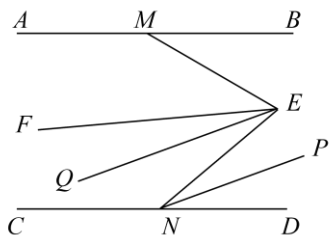


图1

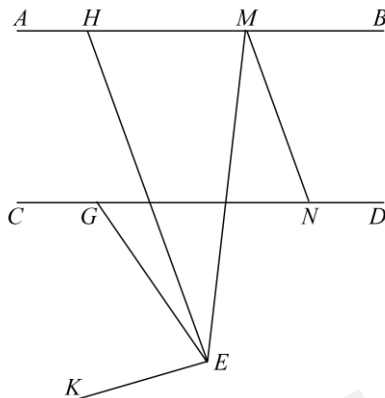


图2

例 6: 光线经过镜面反射时, 入射光线、反射光线与镜面所夹的角对应相等。比如图 1 和图 2 中, 都有 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ 。

(1) 图 1 中, AB 与 BC 是两面镜子, EF 与 GH 分别是入射光线和反射光线, 求证: 当且仅当 $AB \perp BC$ 时, 有 $EF \parallel GH$;

(2) 图 2 中, AB 与 BC 是两面镜子, $\angle ABC = \alpha$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, EF 与 GH 分别是入射光线和反射光线, 它们的夹角 $\angle FMH = \beta$, 求 α 和 β 的数量关系;

(3) 图 3 中, AB, BC, CD 是三面镜子, $\alpha = 120^\circ$, 若入射光线 EF 与镜面 AB 的夹角 $\angle 1 = m^\circ$ ($0^\circ < m < 90^\circ$), 且入射光线经过 n 次反射后的反射光线与 EF 平行, 分别求 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时 γ 的大小 (可用含 m 的式子表示)。

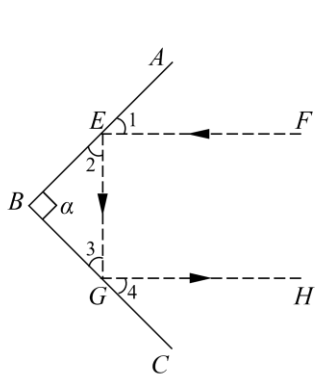


图1

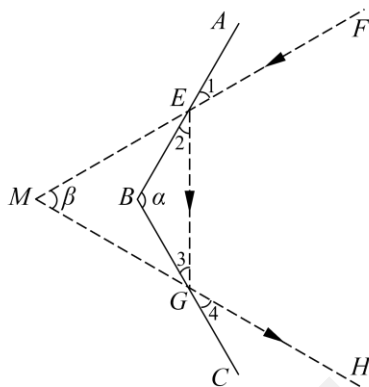


图2

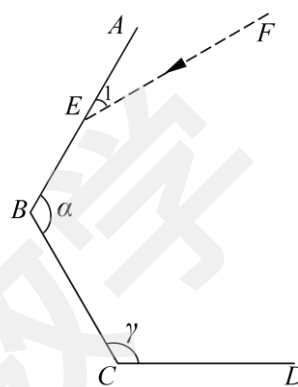


图3

L7 - 拓展篇第 7 讲 - 实数

例 1: 若 $|2022 - x| + \sqrt{x - 2023} = x$, 求 $x - 2022^2$ 。

例 2: 已知 n 是正整数, 求证 $\sqrt{n}$ 是有理数当且仅当 n 是完全平方数。

例 3: 已知 a_1, a_2, b_1, b_2 是有理数, t 是无理数, 若 $a_1 + b_1t = a_2 + b_2t$, 求证: $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$ 。

例 4: 设 a, b 是两个不相等的有理数, 试判断 $\frac{a+\sqrt{3}}{b+\sqrt{3}}$ 是否是有理数, 并说明理由。

例 5: 设 $\sqrt{14}$ 的小数部分为 b , 求 $b^4 + 12b^3 + 37b^2 + 6b - 20$ 的值。

例 6: 将 $1, 2, \dots, 100$ 这 100 个正整数任意分成 50 组, 每组两个数, 现将每组的两个数中任一个数记为 a , 另一个数记为 b , 代入代数式 $\frac{1}{2}(|a - b| + a + b)$ 中进行计算, 求出其结果。将 50 组都代入后可求得 50 个值, 求这 50 个值的和的最大值。

例 7: 已知 a, b 是两个任意有理数, 且 $a < b$, 求证: a 与 b 之间存在着无穷多个有理数。

L7 - 拓展篇第 8 讲 - 方程组（一）

例 1: 解方程组:
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 10 \\ z + x = 12 \end{cases}$$

例 2: 解方程组:
$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 3y - 2z = 6 \\ z + x = -3 \end{cases}$$

例 3: 解方程组
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -7 \\ \frac{x-4y}{3} = \frac{2y+3z}{2} = 2 \end{cases}$$

例 4: 解方程组
$$\begin{cases} x(y+z-x) = 39 - 2x^2 \\ y(z+x-y) = 52 - 2y^2 \\ z(x+y-z) = 78 - 2z^2 \end{cases}$$

例 5: 解方程组
$$\begin{cases} |x| + y = 12 \\ x + |y| = 6 \end{cases}$$

例 6: 解方程组 $\begin{cases} |x - y| = x + y - 2 \\ |x + y| = x + 2 \end{cases}$

例 7: 解方程组 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases}$

L7 - 拓展篇第 9 讲 - 方程组（二）

例 1：有 4 个正整数，其中任意三个数的平均数与第四个数的和，分别等于 29、23、21、17，求这 4 个数中的最大数。

例 2：已知关于 x 的方程 $2a(3x + 2) - 1 = (2b + 1)x$ 有无穷多解，求 a 与 b 的值。

例 3：对 k, m 的哪些值，关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} y = kx + m \\ y = (2k - 1)x + 4 \end{cases}$ 至少有一组解？

例 4: 讨论关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解的组数, 其中 $a_2b_2c_2 \neq 0$ 。

@胡小群讲数学

例 5: 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x + my = 5 \\ x + ny = 4 \end{cases}$ 无解, 且 m, n 是绝对值小于 10 的整数, 求 m, n 的值。

例 6: 已知关于 x, y 的二元一次方程 $(a - 1)x + (a + 2)y + 5 - 2a = 0$, 当 a 每取一个值时, 就有一个方程, 而这些方程有一个公共解, 试求出这个公共解。

L7 - 拓展篇第 10 讲 - 不等式

例 1: 比较 a 与 $3a + 3$ 的大小。

例 2: 解关于 x 的不等式 $ax > b$ 。

例 3: 已知 a, b 都是整数, 如果关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 9x - a \geq 0 \\ 8x - b < 0 \end{cases}$ 的整数解仅为 $1, 2, 3$, 求满足条件的有序数对 (a, b) 共有多少对。

例 4：已知关于 x 的不等式 $(2a - b)x + 3a - 4b < 0$ 的解为 $x > \frac{4}{9}$ ，求关于 x 的不等式 $(a - 4b)x + 2a - 3b > 0$ 的解。

例 5：已知 x, y, z 为非负数，且 $3y + 2z = 3 + x$ ， $3y + z = 4 - 3x$ ，求 $w = 3x - 3y + 4z$ 的最大值。

例 6: 解不等式

(1) $|3x - 2| < -\frac{1}{2}$;

(2) $|3x - 2| > -3$;

(3) $||x + 3| - |x - 3|| > 3$ 。

例 7: 已知关于 x 的不等式 $|x - 1| - |x - 2| < a$,

(1) 若不等式的解集是全体实数, 求 a 的取值范围;

(2) 若不等式有解, 求 a 的取值范围。