



1.3.2.9 题型9(a): 抽象函数综合(上)



1.3.2.9 题型9(b): 抽象函数综合(下)

菁英专属

【例1】 难度 ★★☆☆

定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x, y \in (-1, 1)$, 都有 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

求证: $f(x)$ 为奇函数.

2 ☆☆☆

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, $f(0) \neq 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, 有 $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

- (1) 求证: $f(0) = 1$;
- (2) 求证: 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x) > 0$;
- (3) 求证: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;
- (4) 若 $f(x) \cdot f(2x-x^2) > 1$, 求 x 的取值范围.

3 ☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 对一切实数 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, $f(3) = -2$.

- (1) 求 $f(0)$;
- (2) 试判定该函数的奇偶性;
- (3) 试判断该函数在 $\mathbf{R}$ 上的单调性;
- (4) 解不等式 $f(x^2 - 8x) \geq 8$.

4 ☆☆☆

已知偶函数 $f(x)$ 的定义域是 $x \neq 0$ 的一切实数, 对定义域内的任意 x_1, x_2 都有 $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 且当 $x > 1$ 时 $f(x) > 0$, $f(2) = 1$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

(2) 解不等式 $f(2x^2 - 1) < 2$.

【例5】 难度 ★★☆☆

函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(4) = -4$, 求

$f(x) - f(\frac{1}{x-12}) \geq -12$ 的解集.

6 ☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对任意实数 m, n 都有 $f(m+n) = f(m) + f(n) + \frac{1}{2}$, 且 $f(\frac{1}{2}) = 0$,

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x) > 0$.

(1) 求 $f(1)$;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并证明.