

1.2.2 基本不等式多选题



1.2.2.1 题型1:【数学思维】均值不等式多选题与应试思维综合运用

【例1】 难度 ★★★

(多选题)下列选项正确的是

()

- A. 若 $a \neq 0$, 则 $a + \frac{4}{a}$ 的最小值为 4
- B. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值是 2
- C. 若 $ab < 0$, 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的最大值为 -2
- D. 若正实数 xy 满足 $x+2y=1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 8

【例2】 难度 ★★★

(多选题) 设 a, b 为两个正数, 定义 a, b 的算术平均数为 $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $G(a, b) = \sqrt{ab}$, 则有: $G(a, b) \leq A(a, b)$, 这是我们熟知的基本不等式. 上个世纪五十年代, 美国数学家 D. H. Lehmer 提出了“Lehmer 均值”, 即 $L_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}$, 其中 p 为有理数. 下列关系正确的是

()

- A. $L_{0.5}(a, b) \leq A(a, b)$
- B. $L_0(a, b) \geq G(a, b)$
- C. $L_2(a, b) \geq L_1(a, b)$
- D. $L_{n+1}(a, b) \leq L_n(a, b)$

3 ☆☆☆

(多选题)早在公元前6世纪,毕达哥拉斯学派已经知道算术中项、几何中项以及调和中项,毕达哥拉斯学派哲学家阿契塔在《论音乐》中定义了上述三类中项,后人在此基础上推导出一个基本不等式链,即已知正实数 a, b ,有 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 已知 $a>0, b>0$,且 $a+b+\sqrt{ab}=1$,请利用上述不等关系,判断下列说法正确的是

()

A. $\frac{a^2+b^2}{ab}$ 的最小值为2

B. ab 的最大值为 $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值为6

D. $a+b$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$

【例4】 难度 ☆☆☆

(多选题)(2022年新高考Ⅱ卷真题12题)若 x, y 满足 $x^2+y^2-xy=1$,则 ()

A. $x+y \leq 1$

B. $x+y \geq -2$

C. $x^2+y^2 \leq 2$

D. $x^2+y^2 \geq 1$

5



对于题目：已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $xy = 2$, 求 $A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$ 最小值.

甲同学的解法：因为 $x > 0$, $y > 0$, 所以 $\frac{4}{x} > 0$, $\frac{2}{y} > 0$, 从而

$$A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = (2x + \frac{4}{x}) + (4y + \frac{2}{y}) \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}} + 2\sqrt{4y \cdot \frac{2}{y}} = 8\sqrt{2}$$

所以 A 的最小值为 $8\sqrt{2}$.

乙同学的解法：因为 $x > 0$, $y > 0$,

$$\text{所以 } A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 2x + 4y + \frac{4y + 2x}{xy} = 3x + 6y \geq 2\sqrt{3x \cdot 6y} = 12.$$

所以 A 的最小值为 12.

丙同学的解法：因为 $x > 0$, $y > 0$,

$$\text{所以 } A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2x \cdot 4y} + 2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot \frac{2}{y}} = 12$$

①请对三位同学的解法正确性作出评价；

②为巩固学习效果，老师布置了另外一道题，请你解决：

已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab + 2a + b = 4$, 求 $M = 2a + b + \frac{4}{a+1} + \frac{8}{b+2}$ 的最小值.