

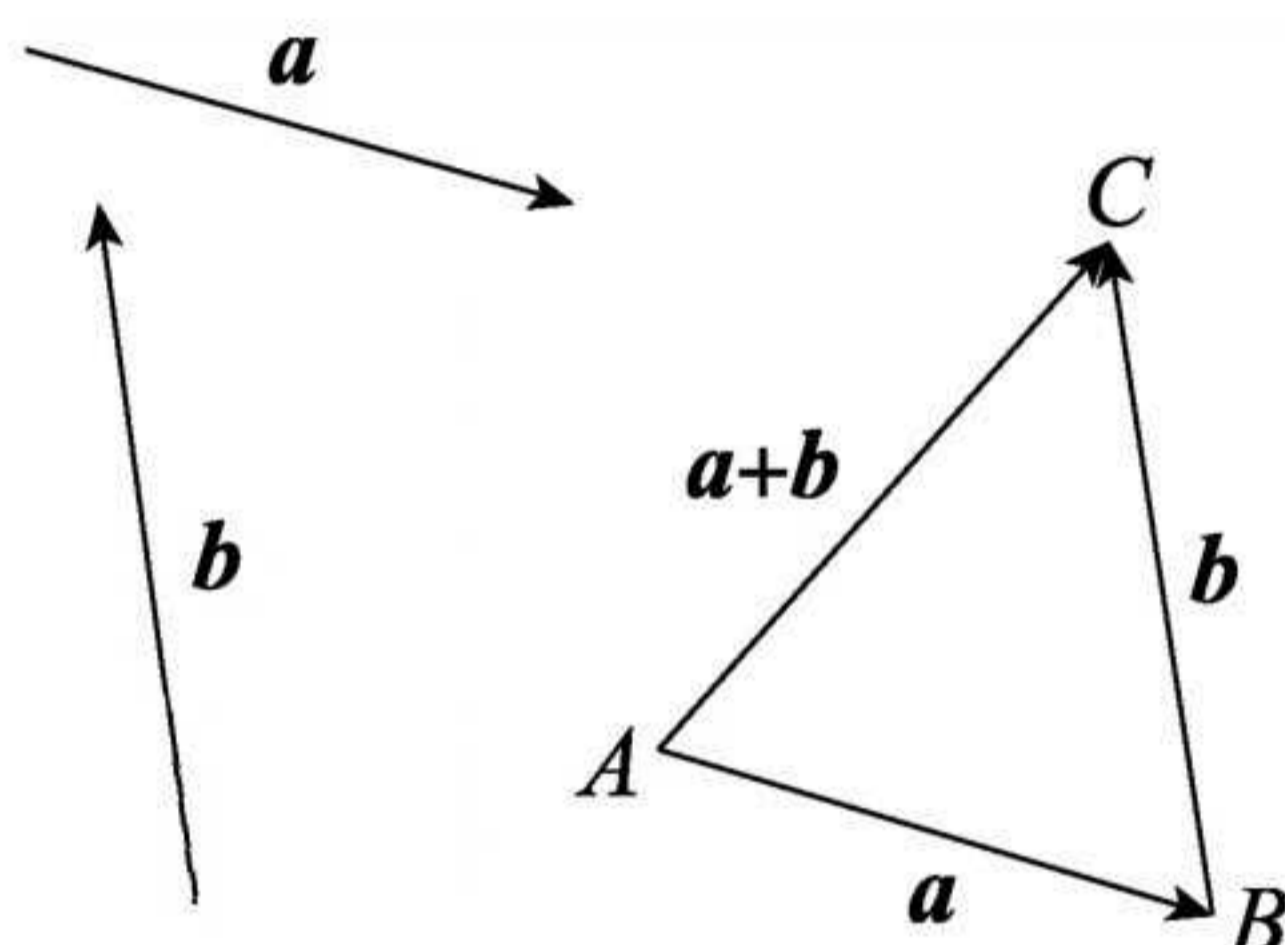
考点 2.1.2 平面向量的运算

【知识梳理】

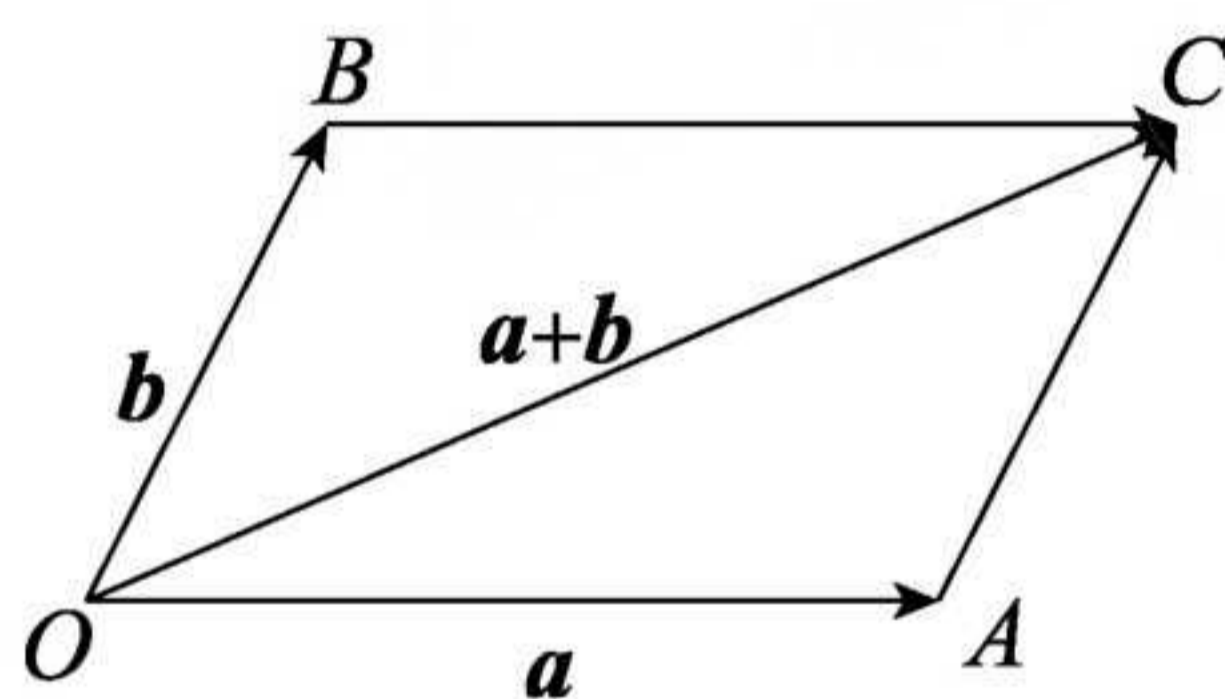
1. 向量加法运算及其几何意义

1) 定义：求两个向量和的运算，叫向量的加法；求向量和有三角形法则、平行四边形法则两种方法；

2) 向量加法的三角形法则：已知非零向量 a, b ，在平面内取任意一点 A ，作 $\overrightarrow{AB} = a$ ， $\overrightarrow{BC} = b$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 a 与 b 的和，记作 $a + b$ ，即 $a + b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ；



3) 向量加法的平行四边形法则：以同一起点 O 为起点的两个已知向量 a, b ，以 OA, OB 为邻边做平行四边形 $ABCD$ ，则以 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是向量 a 和 b 的和



4) 向量的加法满足交换律和结合律： $a + b = b + a$ ； $a + (b + c) = (a + b) + c$.

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$

2. 向量的减法

1) 定义：求两个向量差的运算叫做向量的减法。向量的减法可以转化为向量的加法。

2) 向量减法的三角形法则：已知非零向量 a, b ，在平面内任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = a$ ， $\overrightarrow{OB} = b$ ，则 $\overrightarrow{BA} = a - b$ 。



3. 向量的数乘：一般的，我们规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$ ，它的长度和方向规定如下：

$$1) |\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| |\boldsymbol{a}|$$

2) 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反。

4. 向量数乘的运算律：（设 λ, μ 为实数）

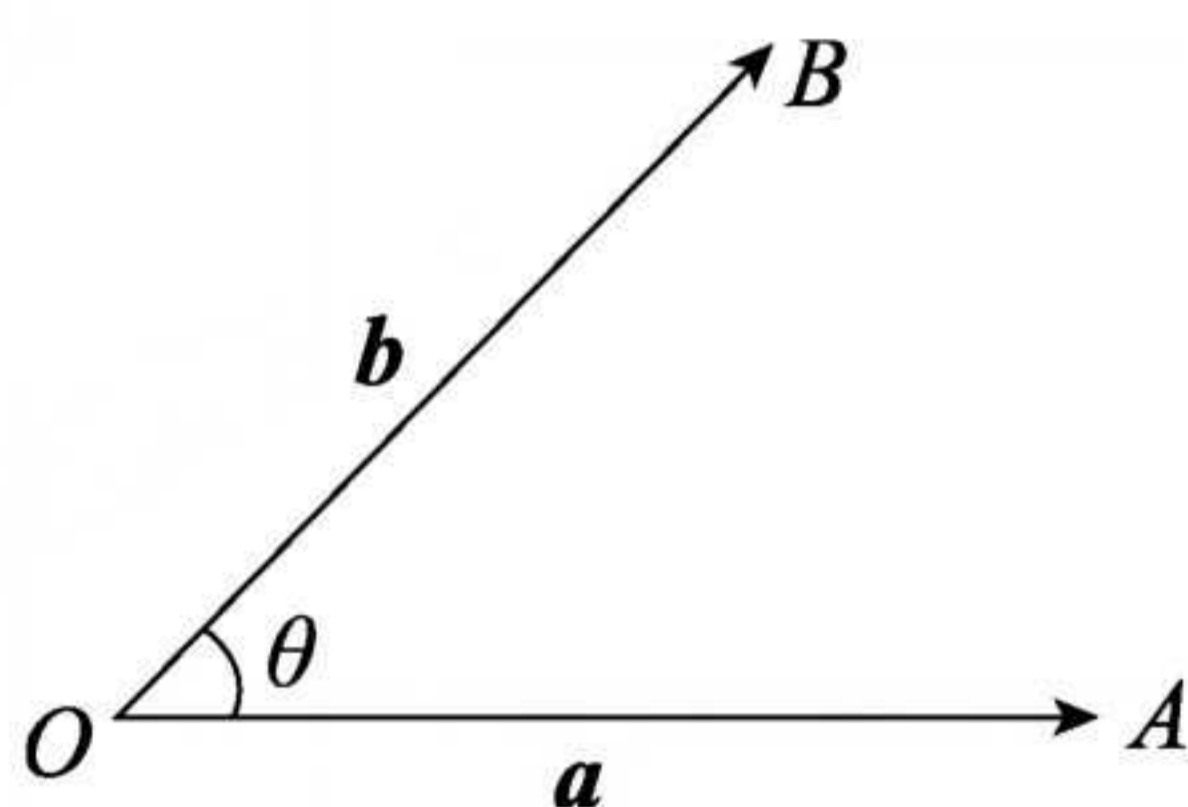
$$1) \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

$$2) (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$$

$$3) \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$$

5. 向量共线定理：向量 $\boldsymbol{a} (\boldsymbol{a} \neq \vec{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在唯一一个实数 λ ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ 。

6. 向量的夹角：已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ ， O 是平面内任意一点，作 $\vec{OA} = \boldsymbol{a}$ ， $\vec{OB} = \boldsymbol{b}$ ，则 $\angle AOB = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$ ，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 。



7. 向量的数量积：已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ ，他们的夹角为 θ ，我们把数量 $|\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

规定零向量与任一向量的数量积为 0。

数量积重要性质：（ $\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量）

$$1) \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\theta$$

$$2) \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

3) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时， $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$ ；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时， $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$ 。特别地， $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ 。

$$4) |\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$$

8. 向量数量积的运算法则：

$$1) \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$

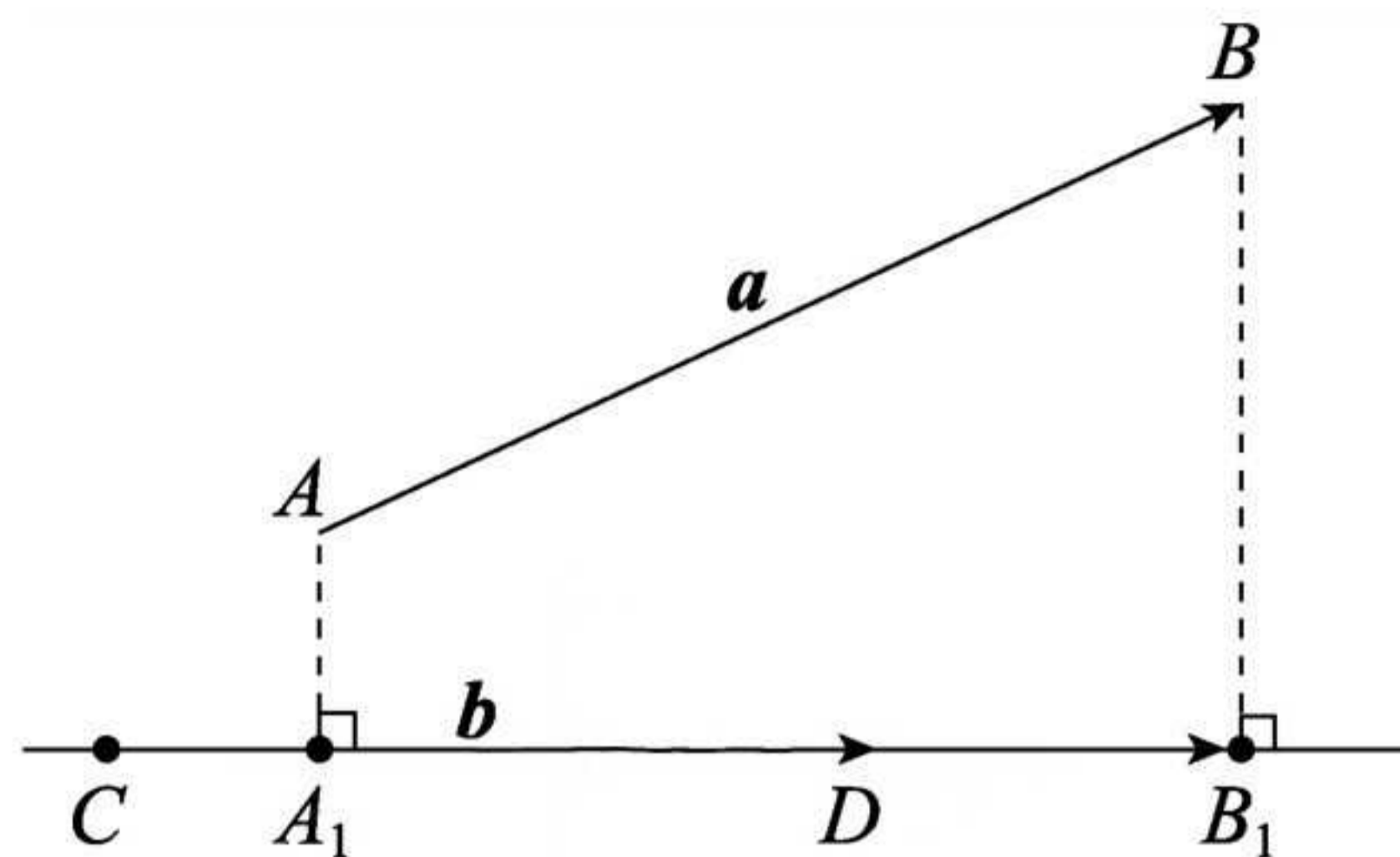
$$2) (\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{b})$$

$$3) (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$$

9. 投影：

1) 定义：设 $\vec{AB} = \boldsymbol{a}$ ， $\vec{CD} = \boldsymbol{b}$ ，过 $\vec{AB}$ 的起点 A 和终点 B 分别做 $\vec{CD}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1 ， B_1 ，得到 $\vec{A_1B_1}$ ，上述操作变换被称为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影， $\vec{A_1B_1}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向

量 b 上的投影向量.



2) 计算投影向量的长度为(a 与 b 的夹角为 θ): $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |a| \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|b|}$

10. 平面向量基本定理:

如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内任一向量 a , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使 $a = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$.

11. 极化恒等式:

对于向量 a, b , 有 $a \cdot b = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$.

12. 奔驰定理:

O 为 $\triangle ABC$ 内任意一点, 则 $S_{\triangle OBC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{\triangle OAC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{\triangle OAB} \cdot \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

【典型例题】

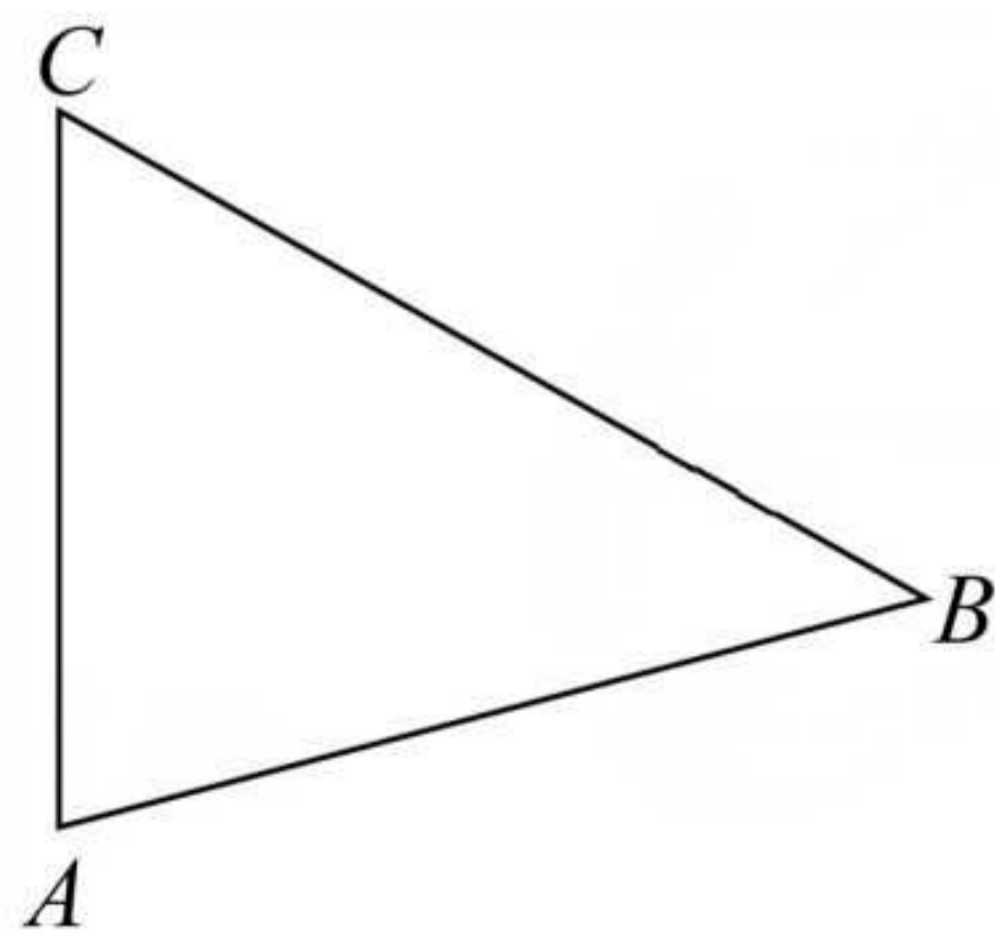


2.1.2.1 向量的加法和减法

难度 ★★☆☆

【例1】 难度 ★★☆☆

如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BC}$ 等于 ()



A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

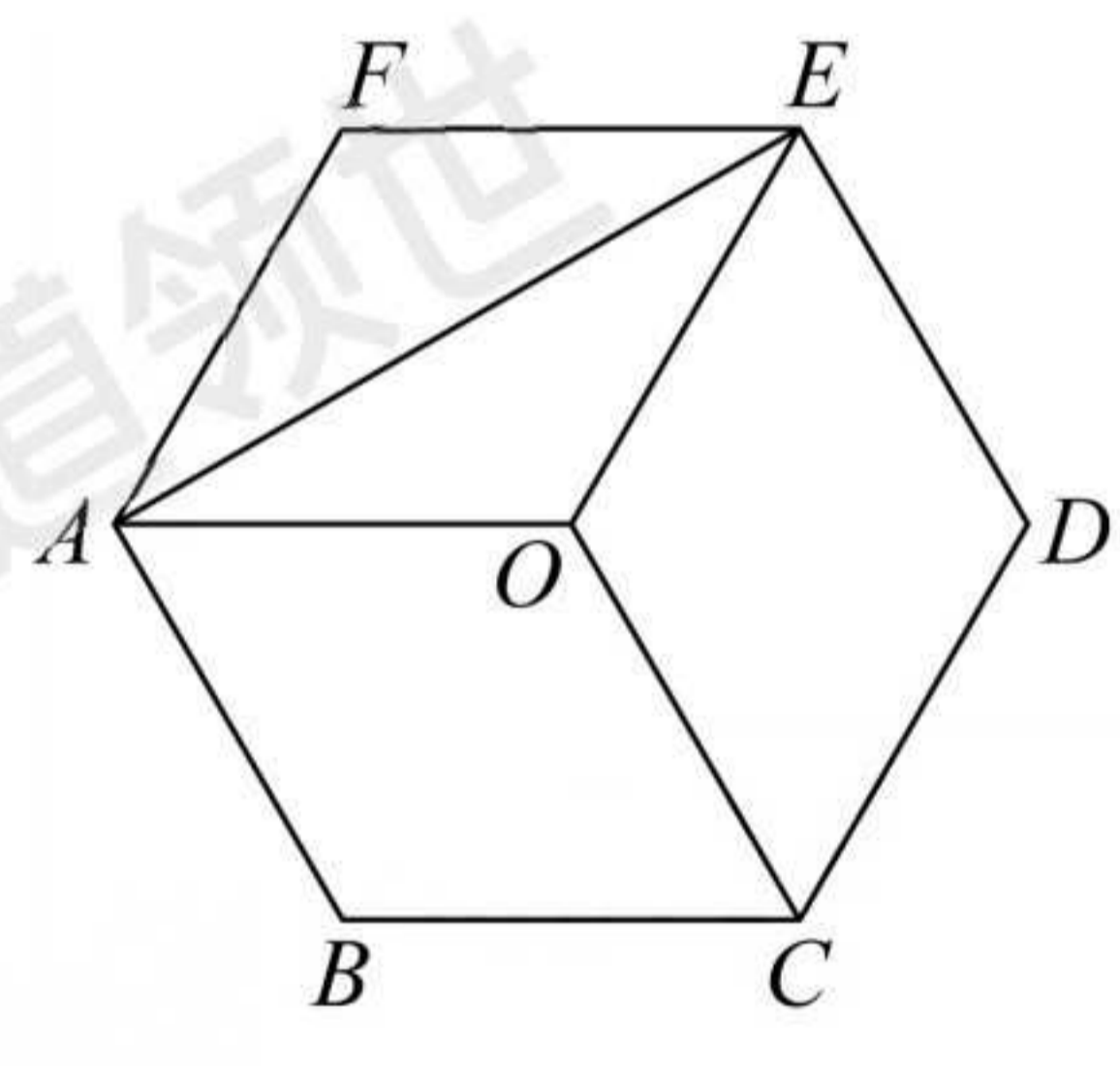
D. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

2 ☆☆☆

向量 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{OM}$ 化简后等于 _____.

【例 3】 难度 ☆☆☆

如图所示，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} =$ ()



- A. $\vec{0}$ B. 0 C. $\overrightarrow{AE}$ D. $\overrightarrow{EA}$

【例 4】 难度 ☆☆☆

在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} =$ ()

- A. $\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{CA}$ C. $\overrightarrow{BA}$ D. $\overrightarrow{AB}$

5

☆☆☆

八卦是中国古老文化的深奥概念,其深邃的哲理解释了自然、社会现象.如图1所示的是八卦模型图,其平面图形记为图2中的正八边形 $ABCDEFGH$,其中 O 为正八边形的中心,则 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ED} =$ ()



图1

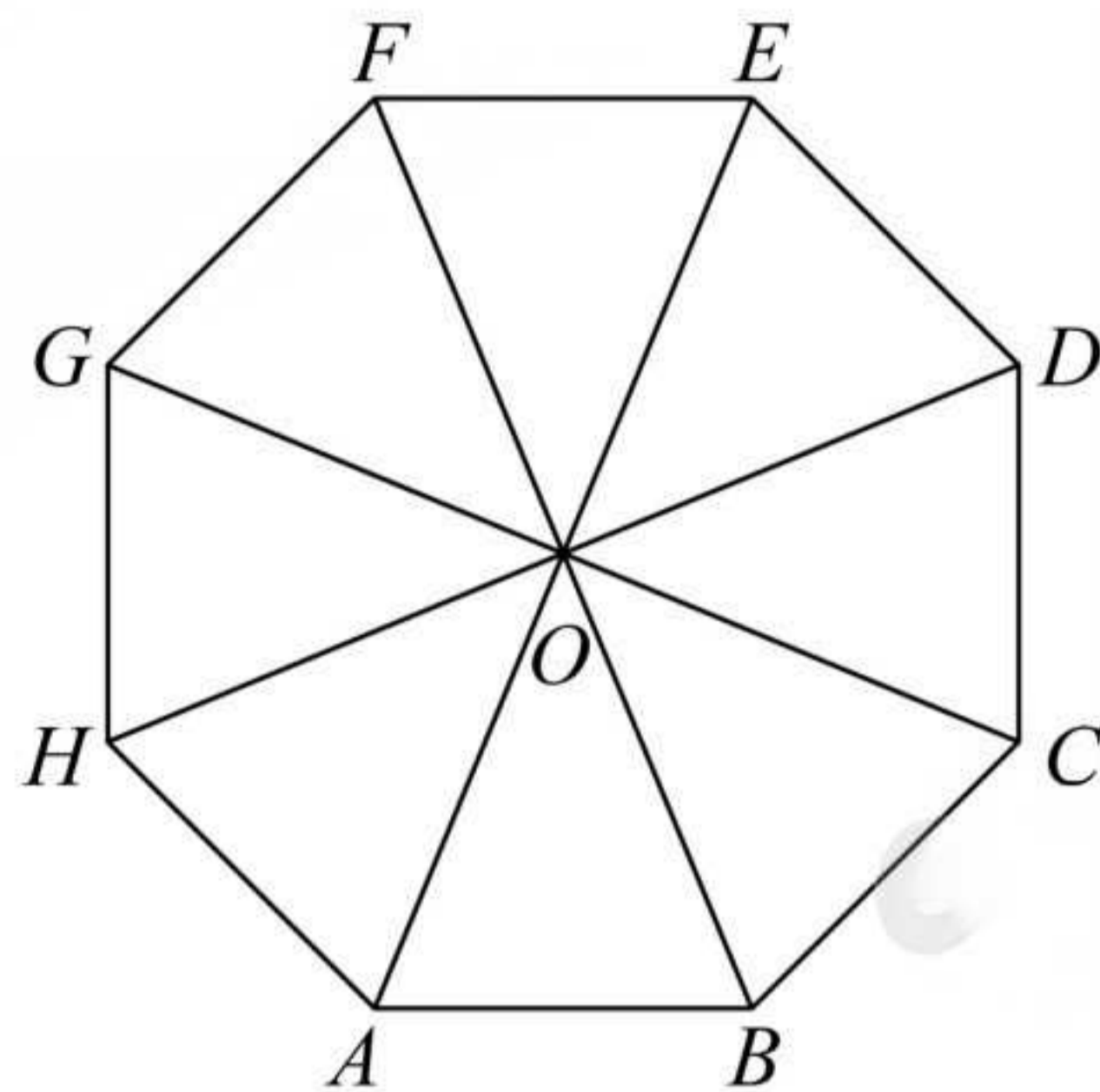


图2

A. $\overrightarrow{OD}$ B. $\overrightarrow{DO}$ C. $\overrightarrow{DA}$ D. $\overrightarrow{AD}$

【例6】 难度 ☆☆☆

化简以下各式:

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA};$

② $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD};$

③ $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AD};$

④ $\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}.$

其结果为 $\vec{0}$ 的个数是

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【例7】 难度 ☆☆☆

如图,已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$,点 E 在 AB 上, $EC \parallel AD$.在图中写出下列几个向量的和或差向量:

① $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} =$ _____

② $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB} =$ _____

③ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} =$ _____

④ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} =$ _____

⑤ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} =$ _____

