

4.2 弦图中的全等问题

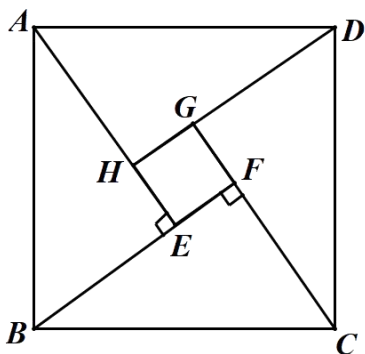
1. 内弦图

如图，在正方形 $ABCD$ 中， $BF \perp CG$ ， $CG \perp DH$ ， $DH \perp AE$ ， $AE \perp BF$ ，
则 $\triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CDG \cong \triangle DAH$ 。

证明 因为 $\angle ABC = \angle BFC = 90^\circ$ ，所以 $\angle ABE + \angle FBC = \angle FBC + \angle FCB = 90^\circ$ 。

所以 $\angle ABE = \angle FCB$ ，又因为 $AB = BC$ 。所以 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ ，

同理可得 $\triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CDG \cong \triangle DAH$ 。



2. 外弦图

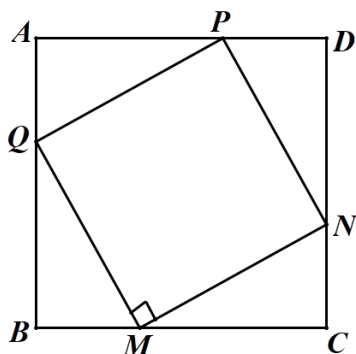
如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 M ， N ， P ， Q 在正方形 $ABCD$ 边上，
且四边形 $MUPQ$ 为正方形，则 $\triangle QBM \cong \triangle MCN \cong \triangle NDP \cong \triangle PAQ$ 。

证明：因为 $\angle B = \angle QMN = \angle C = 90^\circ$ ，

所以 $\angle BQM + \angle QMB = \angle QMB + \angle NMC = 90^\circ$ ，所以 $\angle BQM = \angle NMC$ 。

又因为 $QM = MN$ ，所以 $\triangle QBM \cong \triangle MCN$ 。

同理可得 $\triangle QBM \cong \triangle MCN \cong \triangle NDP \cong \triangle PAQ$ 。



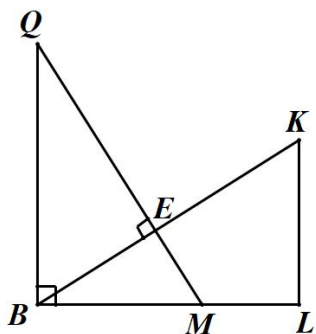
3. 拓展

如图，在 $\text{Rt} \triangle QBM$ 和 $\text{Rt} \triangle BLK$ 中， $QB=BL$ ， $QM \perp BK$ ，所以 $\triangle QBM \cong \triangle BLK$ 。

证明 因为 $\angle BLK=90^\circ$ ， $QM \perp BK$ ，

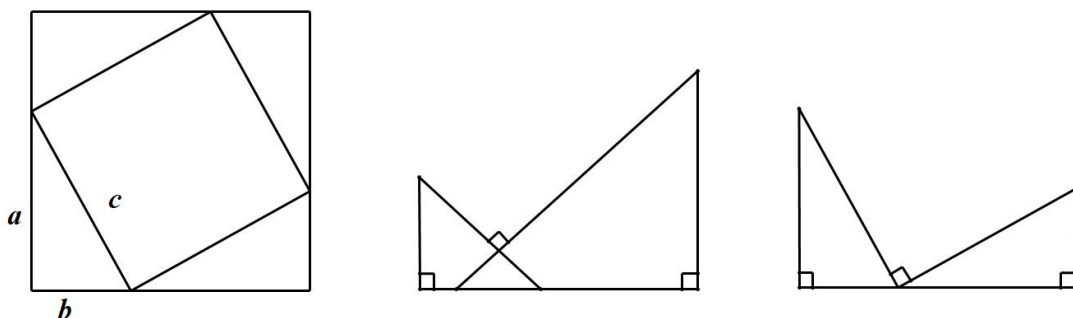
所以 $\angle KBL + \angle QMB = \angle KBL + \angle K = 90^\circ$ 所以 $\angle QMB = \angle K$ ，

又因为 $QB=BL$ ，所以 $\triangle QBM \cong \triangle BLK$ 。

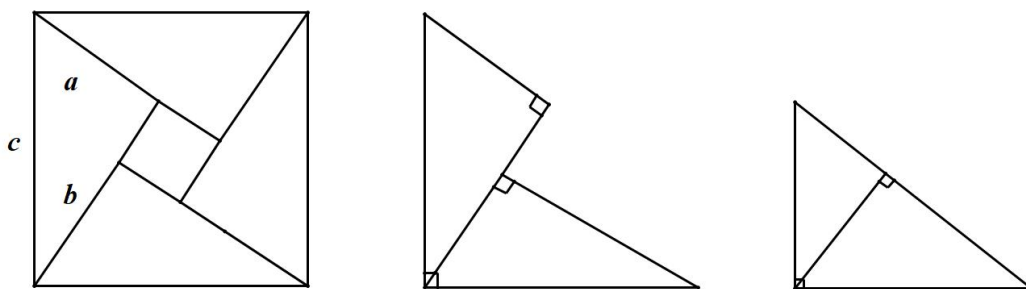


辅助线思路：

(1) 若题目中存在斜正方形或者斜直角时，我们常常可以利用外线弦图或其衍生图来构造相关辅助线解题。



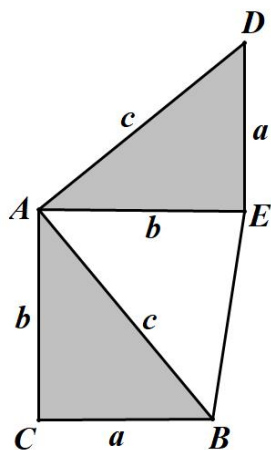
(2) 题目中存在共边互余角关系时，我们常常可以利用内线弦图或其衍生图，来构造相关辅助线解题。





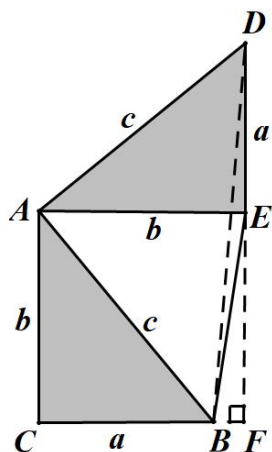
青铜级别

【例 1】完成下面的证明. 将两个全等的直角三角形按下图所示摆放, 其中 $\angle DAB = 90^\circ$. 求证: $a^2 + b^2 = c^2$.



【答案】证明见解析.

【解析】连接 BD , 过点 B 作 DE 边上的高 BF , 则 $BF = b - a$,



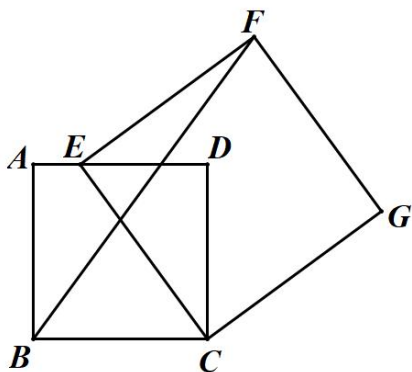
$$\because S_{\text{五边形}ACBED} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab,$$

$$\text{又} \because S_{\text{五边形}ACBED} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a(b-a),$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a(b-a),$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

【例 2】四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，点 E 在边 AD 所在的直线上，连结 CE ，以 CE 为边，作正方形 $CEFG$ （点 D, F 在直线 CE 的同侧），连结 BF 。当点 E 在线段 AD 上时， $AE=1$ ，求 BF 的长。



【答案】 $\sqrt{74}$

【解析】 如图，过点 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H ，延长 FH 交 BC 的延长线于点 K 。

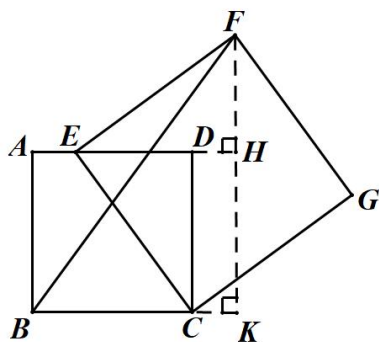
因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 是正方形，

根据“弦图模型”可得 $\triangle ECD \cong \triangle FEH$ ，所以 $FH = ED = AD - AE = 3$ ， $EH = CD = 4$ 。

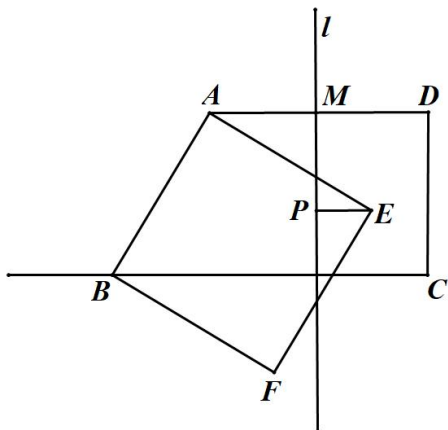
因为 $CDHK$ 为矩形，所以 $HK = CD = 4$ ， $CK = DH = EH - ED = 1$ 。

所以 $FK = FH + HK = 7$ ， $BK = BC + CK = 5$ 。

所以 $BF = \sqrt{FK^2 + BK^2} = \sqrt{74}$

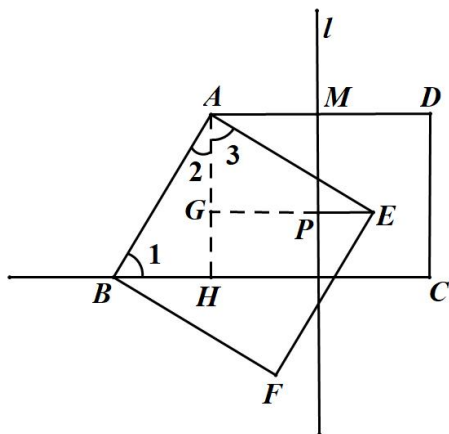


【例3】如图所示，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， l 是 AD 的垂直平分线，交 AD 于点 M ，以腰 AB 为边作正方形 $ABFE$ ，作 $EP \perp l$ 于点 P 。求证： $2EP + AD = 2CD$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】作 $AH \perp BC$ 于 H ，延长 EP 交 AH 于 G ，如图： $\because l$ 是 AD 的垂直平分线，



$\therefore AM = MD = \frac{1}{2}AD$ ， $l \parallel AH$ ，又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是直角梯形， $\therefore$ 四边形 $AHCD$ 是矩形，

$\therefore AH = CD$ ， $\because PE \perp l$ ， $\therefore EG \perp AH$ ， $\therefore$ 四边形 $AGPM$ 是矩形，

$\therefore GP = AM = \frac{1}{2}AD$ ， $\because \angle AHB = \angle AGE = 90^\circ$ ， $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，

在正方形 $ABFE$ 中， $AB = AE$ ， $\angle BAE = 90^\circ$ ， $\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 3$ ，

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle EAG$ 中， $\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle AHB = \angle EGA \\ AB = EA \end{cases}$ ， $\therefore \triangle ABH \cong \triangle EAG$ (AAS)，

$\therefore AH = EG$ ， $\therefore CD = AH = GP + PE = \frac{1}{2}AD + PE$ ，

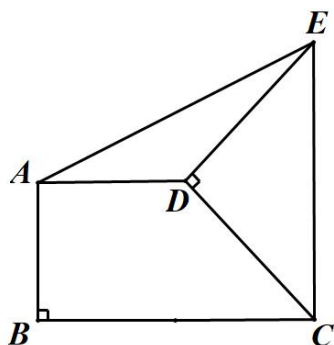
即 $2CD = AD + 2PE$ 。



钻石级别

【例4】已知：在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $AD = 2$ ， $BC = 3$ ，设 $\angle BCD = \alpha$ ，以 D 为旋转中心，将腰 DC 逆时针旋转 90° 至 DE ，连接 AE ， CE 。

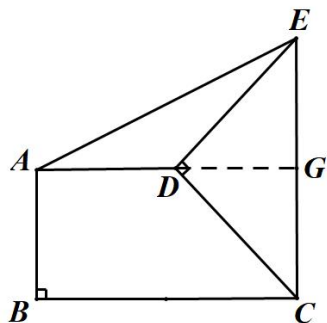
- (1) 当 $\alpha = 45^\circ$ 时，求 $\triangle EAD$ 的面积。
- (2) 当 $\alpha = 30^\circ$ 时，求 $\triangle EAD$ 的面积。
- (3) 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，猜想 $\triangle EAD$ 的面积与 α 的大小有何关系？若有关，写出 $\triangle EAD$ 的面积 S 与 α 的关系式；若无关，请证明结论。



【答案】(1) 1；(2) 1；(3) 无关，证明见解析。

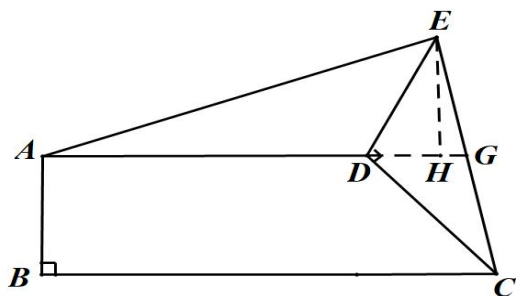
【解析】(1) 当 $\alpha = 45^\circ$ 时， $\angle BCE = 90^\circ$ ，延长 AD 交 CE 于 G ，则 $AG \perp CE$ ， G 是 CE 的中点，

$\therefore$ 四边形 $ABCG$ 是矩形， $EG = DG = 1$ ， $\therefore S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} AD \cdot EG = 1$ 。

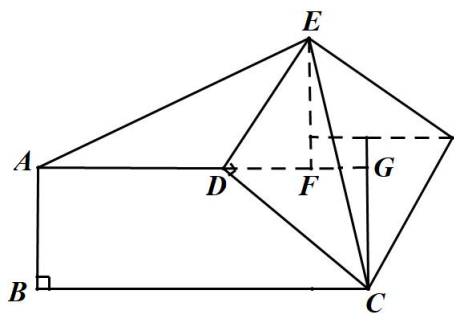


(2) 当 $\alpha = 30^\circ$ 时，延长 AD 交 CE 于 G ，过 E 点作 $EH \perp AG$ 于 H ，

$\therefore \angle CDG = 30^\circ$ ， $\angle EDG = 60^\circ$ ， $DE = CD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $\therefore EH = 1$ ， $\therefore S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} AD \cdot EH = 1$ 。



(3) 方法一：补出外弦图，分别过 E 、 C 两点作 AD 的垂线，交 AD 延长线于 F 、 G ，



则四边形 $ABCG$ 是矩形， $\therefore AG = BC = 3$ ， $\therefore DG = 3 - 2 = 1$ ，

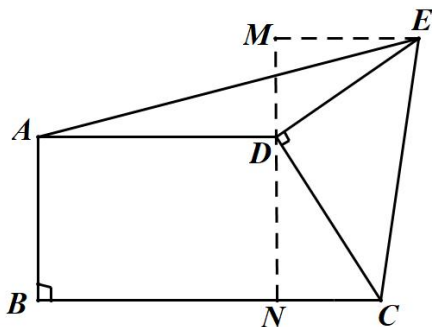
$\because \angle CDE = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CDG + \angle EDG = 90^\circ$ ，

$\because \angle CDG + \angle DCG = 90^\circ$ ， $\therefore \angle DCG = \angle EDG$ ，

$\because CD = DE$ ， $\therefore \triangle CDG \cong \triangle DEF$ ， $\therefore EF = DG = 1$ ，

$\therefore S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} AD \cdot EF = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ 。 $\therefore \triangle EAD$ 的面积与 α 的大小无关。

方法二：补出内弦图。

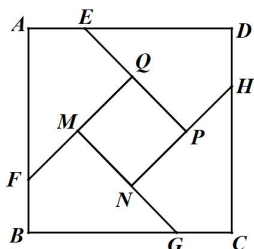


易证 $\triangle EMD \cong \triangle DNC$ 。 $\therefore MD = CN$ ， $\therefore CN = 3 - 2 = 1$ ， $\therefore DM = 1$ ， $\therefore S_{\triangle ADE} = 1$ 。



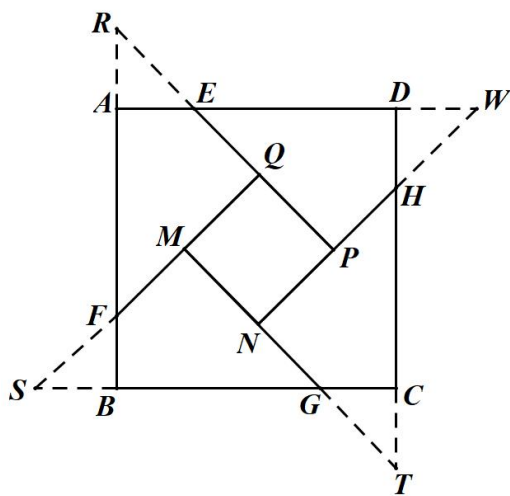
王者级别

【例5】阅读下面材料：小明遇到这样一个问题：如图，在边长为 $a(a > 2)$ 的正方形 $ABCD$ 各边上分别截取 $AE = BF = CG = DH = 1$ ，当 $\angle AFQ = \angle BGM = \angle CHN = \angle DEP = 45^\circ$ 时，求正方形 $MNPQ$ 的面积。



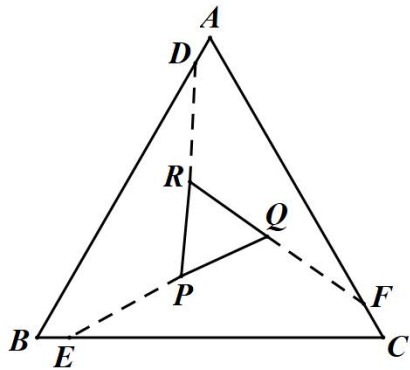
小明发现：分别延长 QE, MF, NG, PH ，交 FA, GB, HC, ED 的延长线于点 R, S, T, W ，可得 $\triangle RQF, \triangle SMG, \triangle TNH, \triangle WPE$ 是四个全等的等腰直角三角形，如下图，请回答：

- ①若将上述四个等腰直角三角形拼成一个新的正方形（无缝隙不重叠），则这个新正方形的边长为_____。
- ②求正方形 $MNPQ$ 的面积。



③参考小明思考问题的方法，解决问题：

如图，在等边 $\triangle ABC$ 各边上分别截取 $AD = BE = CF$ ，再分别过点 D, E, F 作 BC, AC, AB 的垂线得到等边 $\triangle RPQ$ ，若 $S_{\triangle RPQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 AD 的长为 _____ .



【答案】 (1) a ; (2) $S_{\text{正方形}MNPQ} = 2$; (3) $\frac{2}{3}$

【解析】 (1) 方法一： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $\therefore \angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle AFQ = \angle BFS = \angle BGM = \angle CGT = \angle CHN = \angle DHW = \angle DEP = \angle AER = 45^\circ$ ，
 $\therefore AR = AE = BF = BS = \dots = DW$ ， $\therefore S_{\text{新正方形}} = S_{\text{正方形}ABCD} = a^2$.

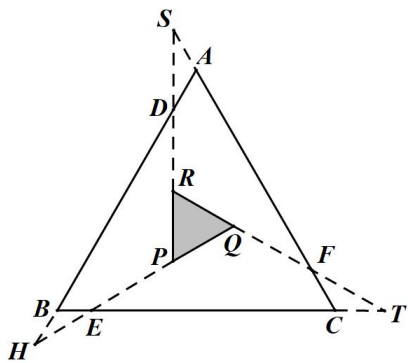
方法二：由已知易知， $AR = BF$ ， $SB = CG$ ， $DH = CT$ ， $AE = DW$ ，
 $\therefore RF = SG = TH = EW = AB = a$ ， $\therefore$ 拼成的新的正方形的边长为 a ，面积为 a^2 .

(2) 四个等腰直角三角形面积和为 a^2 ，正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2 ，

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{正方形}MNPQ} &= S_{\triangle ARE} + S_{\triangle DWH} + S_{\triangle GCT} + S_{\triangle SBF} \\ &= 4S_{\triangle ARE} = 4 \times \frac{1}{2} \times 1^2 = 2. \end{aligned}$$

(3) 如图①所示，分别延长 RD, QF, PE ，交 FA, EC, DB 的延长线于点 S, T, W .

由题意易得： $\triangle RSF, \triangle QET, \triangle PDW$ 均为底角是 30° 的等腰三角形，



图①

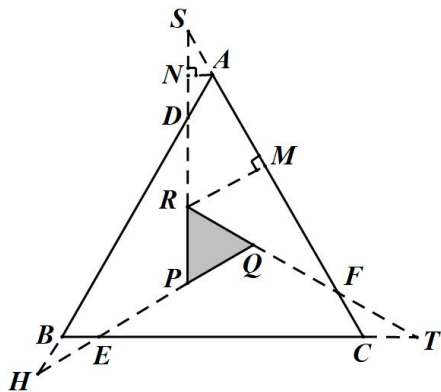
其底边长均等于 $\triangle ABC$ 的边长，设等边三角形边长为 a ，则 $SF = AC = a$ 。

如图②所示，过点 R 作 $RM \perp SF$ 于点 M ，则 $MF = \frac{1}{2}SF = \frac{1}{2}a$ ，

在 $\text{Rt} \triangle RMF$ 中， $RM = MF \cdot \tan 30^\circ = \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ ，

$$\therefore S_{\triangle RSF} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

过点 A 作 $AN \perp SD$ 于点 N ，



图②

设 $AD = AS = x$ ，则 $AN = AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}x$ ， $SD = 2ND = 2AD \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}x$ ，

$$\therefore S_{\triangle ADS} = \frac{1}{2}SD \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

$\therefore$ 三个等腰三角形 $\triangle RSF$ ， $\triangle QET$ ， $\triangle PDW$ 的面积和 $= 3S_{\triangle RSF} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ，

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$\therefore S_{\triangle RPQ} = S_{\triangle ADS} + S_{\triangle CFT} + S_{\triangle BEW} = 3S_{\triangle ADS}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \therefore x^2 = \frac{4}{9},$$

解得 $x = \frac{2}{3}$ 或 $x = -\frac{2}{3}$ （不合题意，舍去）， $\therefore x = \frac{2}{3}$ ，即 AD 的长为 $\frac{2}{3}$ ，故答案为： $\frac{2}{3}$ 。