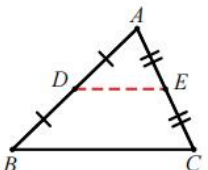
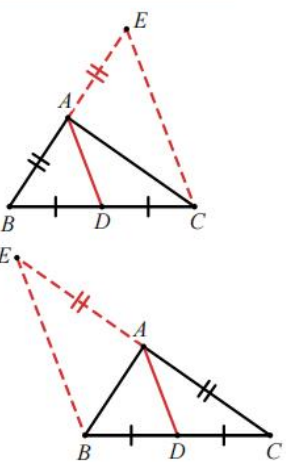


1.2 构造中位线

【知识要点】

当题目中给出三角形两边的中点时，可以直接连出中位线；

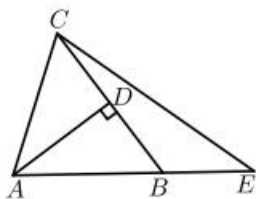
当题目中给出一边的中点时，往往需要找另一边的中点，作出三角形的中位线

	
1. 已知三角形一边上的中点，取另一边的中点，构造出三角形的中位线	2. 已知三角形的中线，通过倍长三角形的一边，构造一个大的三角形，使原来的中线变为新三角形的中位线。



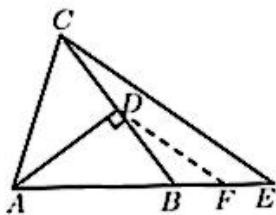
青铜级别

【例 1】 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，延长 AB 至点 E ，使 $\angle AEC = \angle DAB$ 。判断 CE 与 AD 的数量关系，并证明你的结论。

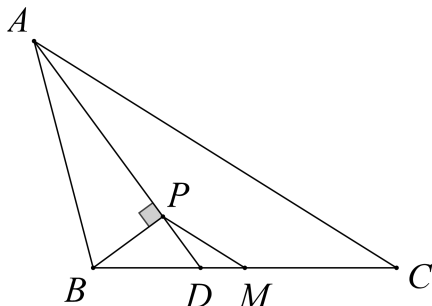


【答案】 取 BE 的中点 F ，连结 DF ： $AB=AC$ ， $AD \perp BC$ ， $BD=CD$ $\therefore$ 点 F 是 BE 的中点， $BF=EF$ ，

$$DF \parallel CE, DF = \frac{1}{2} CE, \angle DFB = \angle CEB, \angle AEC = \angle DAB, \angle DFB = \angle DAB, DA = DF, DA = \frac{1}{2} CE,$$



【例2】如图， $\triangle ABC$ 边长分别为 $AB=14$ ， $BC=16$ ， $AC=26$ ， P 为 $\angle A$ 的平分线 AD 上一点，且 $BP \perp AD$ ， M 为 BC 的中点，则 PM 的值为_____.



【答案】6



钻石级别

【例2】在正方形 $ABCD$ 中，点 P 是射线 CB 上一个动点，连接 PA ， PD ，点 M ， N 分别为 BC ， AP 的中点，连接 MN 交 PD 于点 Q

(1) 如图1，当点 P 与点 B 重合时， $\triangle QPM$ 的形状是_____.

(2) 当点 P 在线段 CB 的延长线上时，如图2.

①依题意补全图2；②判断 $\triangle QPM$ 的形状，并加以证明.

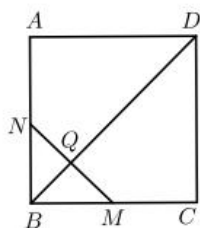


图1

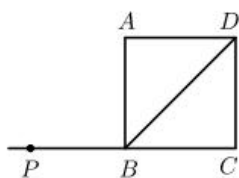


图2

【答案】(1) 等腰直角三角形. (2) ①补全图形，如图1所示.

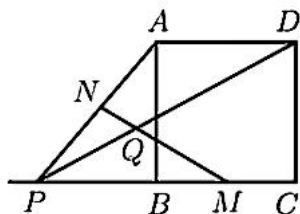


图1

② $\triangle QPM$ 的形状是等腰三角形.

证明：延长 BC 至 E ，使 $CE=BP$ ，连接 AE ，如图2

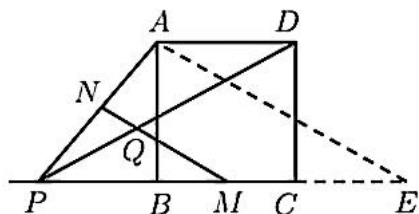


图 2

$\because PB=CE, PB+BC=CE+BC$, 即 $CP=BE$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $AB=DC, \angle ABC=\angle DCB=90^\circ$.

在 $\triangle DCP$ 和 $\triangle ABE$ 中,
$$\begin{cases} DC=AB \\ \angle DCP=\angle ABE \\ CP=BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCP \cong \triangle ABE$

$\therefore \angle 1=\angle E$. $\because M$ 为 BC 的中点, $MB=MC$.

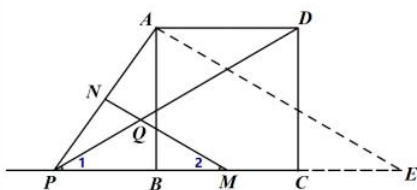
$MB+BP=MC+CE$, 即 $MP=ME$.

$\because M$ 为 PE 的中点, N 为 AP 的中点. $NM \parallel AE$. $\angle 2=\angle E$. $QP=QM$,

$\therefore \triangle QMP$ 是等腰三角形

其他方法

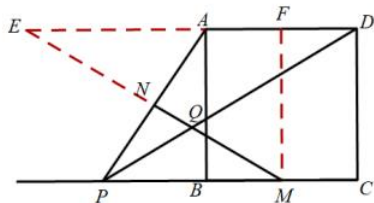
思路一：构造中位线得平行，从而实现角的转化



解题步骤：

证明：如图延长 BC 至 E , 使 $CE=BP$, 连接 AE

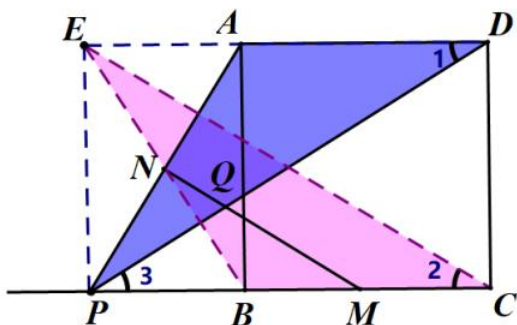
思路二：利用倍长中线构造全等三角形，从而实现线段的转化



解题步骤： $\triangle QPM$ 是等腰三角形

证明：如图，延长 MN , DA 交于点 E , 作 $MF \perp AD$ 于 F

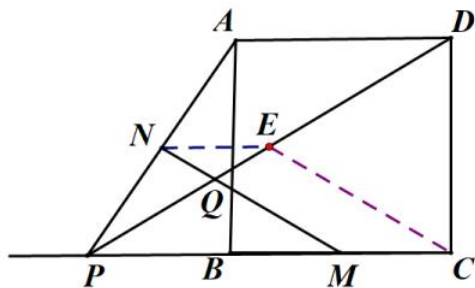
思路三、构造矩形CDEP，利用矩形的性质



$\triangle QPM$ 是等腰三角形

证明：如图，延长DA、BN交于点E，连接PE、CE.

思路四、构造直角三角形斜边中线，从而实现线段和角的转化



$\triangle QPM$ 是等腰三角形

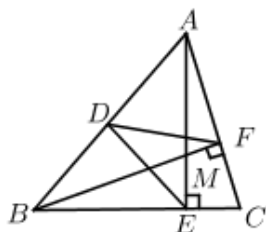
证明：取PD的中点E，连接CE、NE



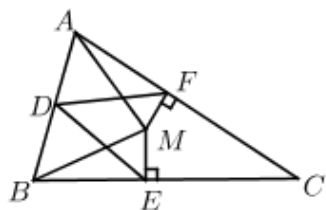
王者级别

【例3】回答下列各题.

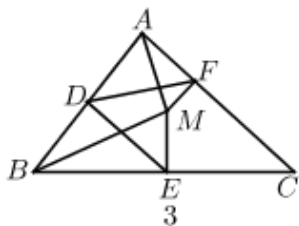
- (1)如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点D是AB边的中点， $AE \perp BC$ ， $BF \perp AC$ ，垂足分别为点E，F，AE，BF交于点M，连接DE，DF. 若 $DE = kDF$ ，则k的值为 _____.



- (2)已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $CB = CA$ ，点D是AB边的中点，点M在 $\triangle ABC$ 的内部，且 $\angle MAC = \angle MBC$. 过点M分别作 $ME \perp BC$ ， $MF \perp AC$ ，垂足分别为点E，F，连接DE，DF. 求证： $DE = DF$.



(3) 如图, 若将上面问题(2)中的条件“ $CB = CA$ ”变为“ $CB \neq CA$ ”, 其他条件不变. 试探究 DE 与 DF 之间的数量关系, 并证明你的结论.



【答案】(1) 1; (2) 证明见解析; (3) $DE = DF$, 证明见解析.

【解析】(1) $\because AE \perp BC, BF \perp AC, \therefore \triangle ABE$ 和 $\triangle ABF$ 都是直角三角形,

$\because$ 点 D 是 AB 的中点, $\therefore DE = \frac{1}{2}AB, DF = \frac{1}{2}AB, \therefore DE = DF,$

$\therefore DE = kDF, \therefore k = 1,$ 故答案为: 1.

(2) $\because CB = CA, \therefore \angle CAB = \angle CBA,$

$\because \angle MAC = \angle MBC, \therefore \angle CAB - \angle MAC = \angle CBA - \angle MBC,$

即 $\angle MAB = \angle MBA, \therefore MA = MB.$

$\because ME \perp BC, MF \perp AC, \therefore \angle AFM = \angle BEM = 90^\circ.$

在 $\triangle AFM$ 与 $\triangle BEM$ 中, $\begin{cases} \angle AFM = \angle BEM \\ \angle MAF = \angle MBE, \\ MA = MB \end{cases}$

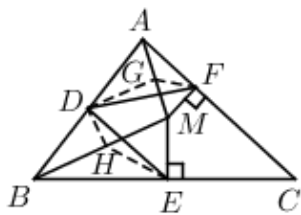
$\therefore \triangle AFM \cong \triangle BEM (AAS).$

$\therefore AF = BE. \because$ 点 D 是 AB 的中点, $\therefore BD = AD.$

在 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ADF$ 中, $\begin{cases} BD = AD \\ \angle DBE = \angle DAF, \\ BE = AF \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADF (SAS). \therefore DE = DF.$

(3) $DE = DF$, 证明如下: 如图, 分别取 AM , BM 的中点 G , H , 连接 DG , FG , DH , EH .



$\because$ 点 D , G , H 分别是 AB , AM , BM 的中点,

$\therefore DG \parallel BM$, $DH \parallel AM$, 且 $DG = \frac{1}{2}BM$, $DH = \frac{1}{2}AM$.

$\therefore$ 四边形 $DHMG$ 是平行四边形. $\therefore DG = HM$, $DH = MG$, $\angle DHM = \angle DGM$.

$\because ME \perp BC$, $MF \perp AC$, $\therefore \angle AFM = \angle BEM = 90^\circ$.

$\therefore FG = \frac{1}{2}AM = AG = GM$, $EH = \frac{1}{2}BM = BH = HM$.

$\therefore FG = DH$, $DG = EH$, $\angle GAF = \angle GFA$, $\angle HBE = \angle HEB$.

$\therefore \angle FGM = 2\angle FAM$, $\angle EHM = 2\angle EBM$. $\because \angle FAM = \angle EBM$. $\therefore \angle FGM = \angle EHM$.

$\therefore \angle DGM + \angle FGM = \angle DHM + \angle EHM$, 即 $\angle DGF = \angle DHE$.

在 $\triangle EHD$ 与 $\triangle DGF$ 中,
$$\begin{cases} EH = DG \\ \angle EHD = \angle DGF \\ HD = GF \end{cases}$$
 $\therefore \triangle EHD \cong \triangle DGF$ (SAS). $\therefore DE = DF$.