

高一

数学

高一数学精讲精练（上）

有道高中教研组 编著

预约陪陪 +wangyushu2013

目录

001 1 必修一

003 1.1 集合与常用逻辑用语

003 1.1.1 集合间的基本关系

004 1.1.1.1 题型 1: 子集个数问题

007 1.1.1.2 题型 2: 多子集个数问题

009 1.1.2 集合的基本运算

010 1.1.2.1 题型 1: 韦恩图解决抽象集合问题【提高专属】

013 1.1.3 集合创新题

013 1.1.3.1 题型 1: 【数学思维】集合创新题【目标、菁英专属】

015 1.1.4 数学逻辑

016 1.1.4.1 题型 1: 充分条件与必要条件【提高专属】

019 1.1.4.2 题型 2: 【数学思维】数学逻辑思维

021 1.2 一元二次函数、方程和不等式

021 1.2.1 基本不等式

022 1.2.1.1 题型 1: 均值不等式的概念与直接应用【提高专属】

025 1.2.1.2 题型 2: 均值不等式的拓展【目标、菁英专属】

027 1.2.1.3 题型 3: 均值不等式的轮换对称

030 1.2.2 基本不等式多选题

030 1.2.2.1 题型 1: 【数学思维】均值不等式多选题与应试思维综合运用

033 1.3 函数的概念与性质

033 1.3.1 函数的概念及其表示

034	1.3.1.1 题型 1: 函数的定义域【提高、目标专属】
037	1.3.2 函数的基本性质
041	1.3.2.1 题型 1: 复合函数的单调性【提高专属】
043	1.3.2.2 题型 2: 分段函数的应用【提高专属】
045	1.3.2.3 题型 3: 一次分式函数的最值与值域
047	1.3.2.4 题型 4: 二次分式最值速算技巧
051	1.3.2.5 题型 5: 函数奇偶性的判断
053	1.3.2.6 题型 6: 奇偶性的应用
056	1.3.2.7 题型 7: 单调性与奇偶性综合应用
059	1.3.2.8 题型 8: 对称性
061	1.3.2.9 题型 9(a): 抽象函数综合(上)
061	1.3.2.9 题型 9(b): 抽象函数综合(下)【菁英专属】
066	1.3.2.10 题型 10: 函数周期性
068	1.3.2.11 题型 11: 对称性与周期性综合应用【菁英专属】
070	1.3.2.12 题型 12(a): 二次恒成立常见解题模板(上)
070	1.3.2.12 题型 12(b): 二次恒成立常见解题模板(下)【目标、菁英专属】
074	1.4 指数函数与对数函数
074	1.4.1 对数
075	1.4.1.1 题型 1: 对数运算法则【提高专属】
077	1.4.1.2 题型 2: 换底公式【提高、目标专属】
080	1.4.2 对数函数
081	1.4.2.1 题型 1(a): 指对幂比大小(上)
081	1.4.2.1 题型 1(b): 指对幂比大小(下)

086	1.4.3	函数的应用
087	1.4.3.1	题型 1: 函数图象变换【目标、菁英专属】
090	1.4.3.2	题型 2: 复杂函数图象
094	1.4.3.3	题型 3: 零点个数问题(基础)
096	1.4.3.4	题型 4: 零点个数问题(进阶)【菁英专属】
097	1.4.3.5	题型 5: 一元二次方程根的分布
099	1.4.3.6	题型 6: 【数学思维】函数的建模与应用【菁英专属】
101	1.4.4	函数创新题
101	1.4.4.1	题型 1: 【数学思维】函数的创新与新定义题
104	1.4.5	函数多选题
104	1.4.5.1	题型 1: 【数学思维】函数多选题与应试思维综合运用
106	1.5	三角函数
106	1.5.1	任意角和弧度制
107	1.5.1.1	题型 1: 任意角与弧度制【提高、目标专属】
110	1.5.2	三角函数的概念
110	1.5.2.1	题型 1: 三角函数的基本概念【提高、目标专属】
114	1.5.2.2	题型 2: 同角三角函数关系化简求值【提高、目标专属】
117	1.5.3	诱导公式
117	1.5.3.1	题型 1: 利用诱导公式化简求值【提高、目标专属】
120	1.5.4	三角恒等变换
121	1.5.4.1	题型 1: 和差角公式
124	1.5.4.2	题型 2: 二倍角公式
126	1.5.4.3	题型 3: 辅助角公式

128	1.5.5	三角函数的图象与性质
130	1.5.5.1	题型 1(a): 正(余)弦型函数的图象和性质(上)【目标、菁英专属】
130	1.5.5.1	题型 1(b): 正(余)弦型函数的图象和性质(下)【目标、菁英专属】
135	1.5.5.2	题型 2: 三角函数的图像变换
137	1.5.5.3	题型 3: 三角函数图像求值
140	1.5.5.4	题型 4(a): 与 ω 有关的性质问题(上)【菁英专属】
140	1.5.5.4	题型 4(b): 与 ω 有关的性质问题(下)【菁英专属】
143	1.5.6	三角函数创新题
143	1.5.6.1	题型 1: 【数学思维】三角函数的创新与新定义题
145	1.5.7	三角函数多选题
145	1.5.7.1	题型 1: 【数学思维】三角函数多选题与应试思维综合运用

必修一



有1个世

首1世

2

1.1 集合与常用逻辑用语

1.1.1 集合间的基本关系



知识梳理

1. 集合的定义:

一般地, 我们把研究对象统称为元素, 一些元素组成的总体叫集合, 也简称集。

2. 元素与集合的关系:

- (1) 若 a 是集合 A 中的元素, 则称 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$;
- (2) 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a 不属于集合 A , 记作 $a \notin A$ 。

3. 常见集合的符号表示:

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$

4. 集合中元素的特性:

- (1) 确定性 (2) 互异性 (3) 无序性。

5. 集合的表示方法:

(1) 列举法: 把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内表示集合。这是最简单的集合表示方法, 但是, 也具有本身的局限性, 比如只能表示有限集不能表示无限集等

(2) 描述法: $\{x \mid x \text{ 具有的性质}\}$, 其中 x 为集合的代表元素。

(3) 图示法: 用韦恩图来表示集合。是一种利用二维平面上的点集表示集合的方法。

例: 一般用平面上的矩形或圆形表示一个集合, 是集合的一种直观的图形表示法

6. 集合的分类

(1) 按元素的多少分:

- ① 含有有限个元素的集合叫做有限集。
- ② 含有无限个元素的集合叫做无限集。
- ③ 不含有任何元素的集合叫做空集($\emptyset$)。

(2) 按元素的属性分: 数集、点集、其它集合。

7. 集合间的基本关系

名称	记号	意义	性质	示意图
子集	$A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)	A 中的任一元素都属于 B	$(1) A \subseteq A$ $(2) \emptyset \subseteq A$ (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (4) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$	
真子集	$A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)	$A \subseteq B$, 且 B 中至少有一元素不属于 A	$(1) \emptyset \subsetneq A$ (A 为非空集合) (2) 若 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$	
集合相等	$A = B$	A 中的任一元素都属于 B , B 中的任一元素都属于 A	$(1) A \subseteq B$ $(2) B \subseteq A$	

【典型例题】



1.1.1.1 题型1: 子集个数问题

【例1】 难度 ★★★

已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

- (1) A 的子集有多少个?
- (2) A 的真子集有多少个?
- (3) A 的非空真子集有多少个?
- (4) 若 $\{1\} \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则有多少个 B ?
- (5) 若 $\{1\} \subsetneq C \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则有多少个 C ?

2

☆☆☆

已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ，则 A 的子集的个数为_____.

【例3】

难度 ☆☆☆

集合 $A = \{-2, 1, 2, 3\}$ ，则 A 的真子集个数为 ()

A. 16

B. 15

C. 14

D. 13

【例4】

难度 ☆☆☆

设集合 $P = \{x \mid x^2 = 1\}$ ，则集合 P 的非空真子集的个数是 ()

A. 2

B. 3

C. 7

D. 8

5 ☆☆☆

满足 $\{3, 4\} \subseteq M \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 的所有集合 M 的个数是 ()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【例6】 难度 ☆☆☆

设集合 M 满足 $\{1, 2\} \subseteq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$, 则满足条件的集合 M 的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【例7】 难度 ☆☆☆

集合 P 具有性质“若 $x \in P$, 则 $\frac{1}{x} \in P$ ”, 就称集合 P 是伙伴关系的集合, 集合 $A = \{-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\}$ 的所有非空子集中具有伙伴关系的集合的个数为

- ()
A. 3 B. 7 C. 15 D. 31

【例8】 难度 ☆☆☆

若 $x \in A$, 则 $\frac{1}{x} \in A$, 就称 A 是伙伴关系集合, 集合 $M = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 2, 5\}$ 的所有非空子集中具有伙伴关系的集合的个数是 ()

- A. 1 B. 3 C. 7 D. 31



1.1.1.2 题型2: 多子集个数问题

【例1】 难度 ★★★

设集合 A, B 是非空集合 M 的两个不同子集.

(1) 若 $M = \{a_1, a_2\}$, 且 A 是 B 的子集, 求所有有序集合对 (A, B) 的个数;

(2) 若 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 且 A 是 B 的子集, 求所有有序集合对 (A, B) 的个数.

【例2】 难度 ★★★

满足 $A_1 \cup A_2 = \{x, y, z\}$ 的有序集合对 (A_1, A_2) 的个数是 ()

A. 6

B. 8

C. 24

D. 27

3 ☆☆☆

(2022·北京自主招生)集合 A, B 的并集 $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 与 (B, A) 视为不同的集合对. 则这样的集合对 (A, B) 的个数是_____.

【例4】 难度 ☆☆☆

(2020 清华强基计划) A, B, C 均为 $\{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ 的子集, 且 $A \subseteq C, B \subseteq C$, 问有序的 (A, B, C) 共有多少?

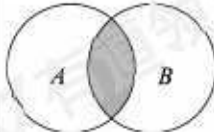
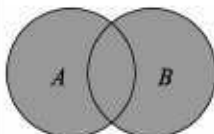
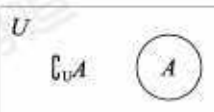
【例5】 难度 ☆☆☆

A, B 是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的非空子集, 则满足 $A \cap B = \emptyset$ 的有序集合对 (A, B) 共有_____个.

1.1.2 集合的基本运算



知识梳理

交集	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$	$(1) A \cap A = A$ $(2) A \cap \emptyset = \emptyset$ $(3) A \cap B \subseteq A$ $A \cap B \subseteq B$	
并集	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$	$(1) A \cup A = A$ $(2) A \cup \emptyset = A$ $(3) A \cup B \supseteq A$ $A \cup B \supseteq B$	
补集	$\complement_U A$	$\{x \mid x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$	$(1) A \cap (\complement_U A) = \emptyset$ $A \cup (\complement_U A) = U$ $(2) \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$	

【典型例题】

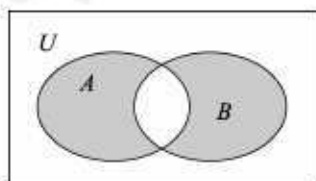


1.1.2.1 题型 1: 韦恩图解决抽象集合问题

提高专属

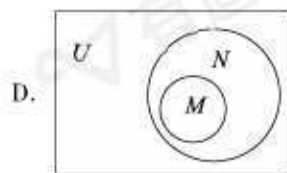
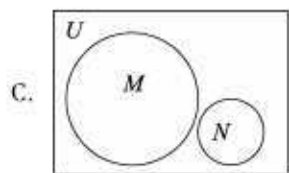
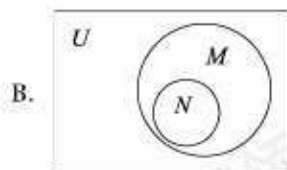
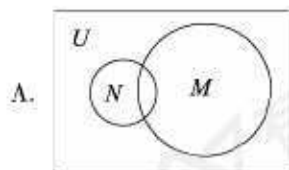
【例 1】 难度 ★☆☆

集合 $A = \{-2, 0, 1, 2\}$, $B = \{-2, 1, 3\}$, 则图中阴影部分所表示的集合为 ()

A. $\{-2\}$ B. $\{0, 1, 3\}$ C. $\{0, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

【例 2】 难度 ★☆☆

(2009 广东高考文科真题 1) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 则正确表示集合 $M = \{-1, 0, 1\}$ 和 $N = \{x \mid x^2 + x = 0\}$ 关系的韦恩(Venn)图是 ()



3

☆☆☆

已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{1, 2, 4, 6, 7\}$, 若集合 $A = \{3, 5\}$, 则下列阴影部分可以表示 A 集合的是 ()



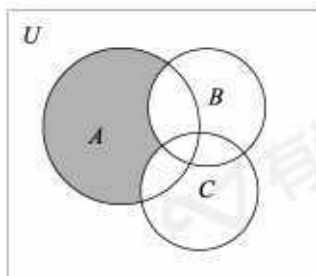
【例4】 难度 ☆☆☆

(2010 辽宁高考理科真题1) 已知 A, B 均为集合 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的子集, 且 $A \cap B = \{3\}$, $(\complement_U B) \cap A = \{9\}$, 则 A 等于 ()

A. $\{1, 3\}$ B. $\{3, 7, 9\}$ C. $\{3, 5, 9\}$ D. $\{3, 9\}$

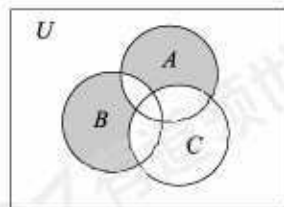
【例5】 难度 ☆☆☆

如图请用集合 U, A, B, C 表示图中阴影部分所表示的集合 ()

A. $(\complement_U (B \cup C)) \cap A$ B. $(\complement_U (A \cup C)) \cap B$ C. $(\complement_U (A \cup B)) \cap C$ D. $(\complement_U (A \cup B)) \cup C$

6 ☆☆☆

已知集合 A, B, C 为全集 U 的子集, 那么图中阴影部分所表示的集合为 ()



- A. $(A \cup B) \cap \complement_U C$ B. $(A \cup B) \cap \complement_U (A \cap B)$
 C. $(A \cup B) \cap \complement_U (A \cap B \cap C)$ D. $[A \cap \complement_U (B \cup C)] \cup [B \cap \complement_U (A \cup C)]$

【例7】 难度 ☆☆☆

(2009 江西高考理科真题3) 已知全集 $U = A \cup B$ 中有 m 个元素, $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 中有 n 个元素. 若 $A \cap B$ 非空, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ()

- A. mn B. $m + n$ C. $n - m$ D. $m - n$

【例8】 难度 ☆☆☆

(2009 湖南高考理科真题9) 某班共 30 人, 其中 15 人喜爱篮球运动, 10 人喜爱乒乓球运动, 8 人对这两项运动都不喜爱, 则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为 _____.

1.1.3 集合创新题



1.1.3.1 题型1:【数学思维】集合创新题 目标、菁英专属

【例1】 难度 ★★★

设非空集合 A, B , 定义 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 则集合 $B - (B - A) =$ ()

- A. A B. B C. $A \cup B$ D. $A \cap B$

【例2】 难度 ★★★

(多选题) 对于数集 A, B , 它们的 Descartes 积 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$, 则 ()

- A. $A \times B = B \times A$
 B. 若 $A \subseteq C$, 则 $(A \times B) \subseteq (C \times B)$
 C. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 D. 集合 $\{0\} \times \mathbf{R}$ 表示 y 轴所在直线
 E. 集合 $A \times A$ 表示正方形区域(含边界)

3 ☆☆☆

(多选题) 定义集合运算 $M - N = \{x \mid x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$ 称为集合 M 与集合 N 的差集; 定义集合运算 $M \Delta N = (M - N) \cup (N - M)$ 称为集合 M 与集合 N 的对称差, 有以下 4 个命题:

则 4 个命题中是真命题的是

()

A. $M \Delta N = N \Delta M$

B. $(M \Delta N) \Delta P = M \Delta (N \Delta P)$

C. $M \cap (N \Delta P) = (M \cap N) \Delta (M \cap P)$

D. $M \cup (N \Delta P) = (M \cup N) \Delta (M \cup P)$

【例 4】☆☆☆

已知集合 $M = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 0 < x \leq 15\}$, A_1, A_2, A_3 满足: ① $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = M$; ② 每个集合都恰有 5 个元素. 集合 $A_i (i=1, 2, 3)$ 中最大元素与最小元素之和称为 A_i 的特征数, 记为 $X_i (i=1, 2, 3)$, 则 $X_1 + X_2 + X_3$ 的值不可能为

()

A. 37

B. 39

C. 48

D. 57

1.1.4 数学逻辑



知识梳理

1. 命题：一般地，我们把用语言，符号或式子表示出的，可以判断真假的陈述句叫做命题，判断为真的语句叫真命题，判断为假的语句叫假命题，中学数学中的很多命题可以写成“若 p 则 q ”的形式，其中 p 称作命题的条件， q 叫做命题的结论。
2. 充分条件和必要条件：一般地，“若 p 则 q ”是真命题，是指由 p 可以通过推理得到 q ，这时，我们就说，由 p 可以推出 q ，记作 $p \Rightarrow q$ ，并且说 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件。
3. 充要条件：如果“若 p 则 q ”和它的逆命题“若 q 则 p ”均是真命题，即既有 $p \Rightarrow q$ 又有 $q \Rightarrow p$ ，就记作 $p \Leftrightarrow q$ ，此时 p 既是 q 的必要条件，也是 q 的充分条件，我们就说 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件。

4. 判断方法：

(1) 定义法：

$$\text{① } p \text{ 是 } q \text{ 的充分不必要条件} \Leftrightarrow \begin{cases} p \Rightarrow q \\ p \not\Leftarrow q \end{cases}$$

$$\text{② } p \text{ 是 } q \text{ 的必要不充分条件} \Leftrightarrow \begin{cases} p \not\Rightarrow q \\ p \Leftarrow q \end{cases}$$

$$\text{③ } p \text{ 是 } q \text{ 的充要条件} \Leftrightarrow \begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{cases}$$

$$\text{④ } p \text{ 是 } q \text{ 的既不充分也不必要条件} \Leftrightarrow \begin{cases} p \not\Rightarrow q \\ p \not\Leftarrow q \end{cases}$$

(2) 集合法：设 $P = \{p\}$ ， $Q = \{q\}$ ，

①若 $P \subsetneq Q$ ，则 p 是 q 的充分不必要条件， q 是 p 的必要不充分条件。

②若 $P = Q$ ，则 p 是 q 的充要条件 (q 也是 p 的充要条件)。

5. 特别提醒：

(1) 解决充要条件的逆向问题时，往往从集合角度考虑，会更方便快捷，设 $P = \{p\}$ ， $Q = \{q\}$ ，

①若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $P \subsetneq Q$

②若 p 是 q 的必要不充分条件，则 $Q \subsetneq P$

③若 $P = Q$ ，则 p 是 q 的充要条件 (q 也是 p 的充要条件)。

(2) 证明 p 是 q 的充要条件，既要证“ $p \Rightarrow q$ ”，又要证“ $q \Rightarrow p$ ”，前者证明的是充分性，后者证明的是必要性。

【典型例题】



1.1.4.1 题型 1: 充分条件与必要条件

提高专属

【例 1】 难度 ☆☆☆

下列语句是命题的是

()

- ①三角形的内角和等于 180° ;
- ② $2 > 3$;
- ③ $x > 2$;
- ④这座山真险啊!
- ⑤若两直线平行, 则这两条直线没有公共点
- ⑥ $y = kx + b (k \neq 0)$ 是一次函数吗?

【例 2】 难度 ☆☆☆将下列命题改写为“若 p , 则 q ”的形式:

- (1) 偶数能被 2 整除.
- (2) 奇函数的图象关于原点对称.
- (3) 6 是 12 和 18 的公约数;
- (4) 能被 6 整除的整数, 一定能被 3 整除;
- (5) 平行四边形的对角线互相平分;
- (6) 已知 x, y 为非零自然数, 当 $y - x = 2$ 时, $y = 4, x = 2$.

3

☆☆☆

《左传》有记载：“皮之不存，毛将焉附？”则“有毛”是“有皮”的 ()

- A. 充分条件
- B. 必要条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【例4】 难度 ☆☆☆

俗话说“便宜没好货”，这句话的意思是，“不便宜”是“好货”的()条件

- A. 充分非必要
- B. 必要非充分
- C. 充要
- D. 非充分非必要

【例5】 难度 ☆☆☆

(多选题)已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件， q 是 r 的充分条件， s 是 r 的必要条件， q 是 s 的必要条件，下列命题正确的是 ()

- A. r 是 q 的充要条件
- B. p 是 q 的充分条件而不是必要条件
- C. r 是 q 的必要条件而不是充分条件
- D. r 是 s 的充分条件而不是必要条件

6 ☆☆☆

(2021 新高考天津真题 2) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 6$ ” 是 “ $a^2 > 36$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【例 7】☆☆☆

(2017 天津高考文科真题 2) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $2 - x \geq 0$ ” 是 “ $|x - 1| \leq 1$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



1.1.4.2 题型2: 【数学思维】 数学逻辑思维

【例1】 难度 ★★★

(2024 新高考Ⅱ卷高考真题填空压轴第14题) 在如图的 4×4 方格表中选4个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有_____种选法, 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格的4个数之和的最大值是_____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

【例2】 难度 ★★★

(2008 南开大学保送生自主选拔测试) 6个球编号为0, 1, 2, 3, 4, 5, 其中1~5中有一个球与0编号球的重量不同(谁轻谁重不清楚)。用没有砝码的天平进行称重, 则至少需要称重()次, 可确保找出重量不同的小球。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

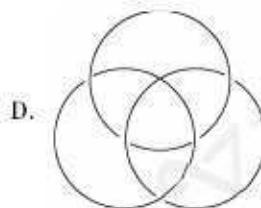
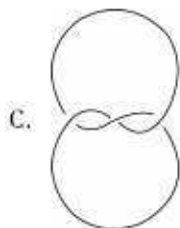
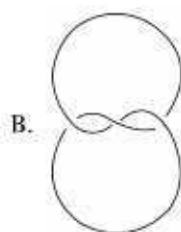
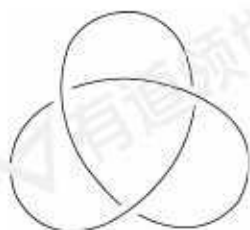
【例3】 难度 ★★★

(2023 教育部四省联考填空压轴第16题) 如表为一个开关阵列, 每个开关只有“开”和“关”两种状态, 按其中一个开关1次, 将导致自身和所有相邻的开关改变状态。例如, 按(2, 2)将导致(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)改变状态。如果要求只改变(1, 1)的状态, 则需按开关的最少次数为_____.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

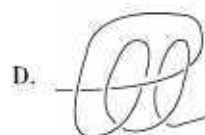
4 ☆☆☆

(2025 教育部八省联考多选压轴第 11 题)(多选题)下面四个绳结中,不能无损伤地变为如图中的绳结的有 ()



【例 5】☆☆☆

(2009 复旦大学自主招生选拔测试真题)下列曲线中哪一条拿住两端后不打结? ()



1.2 一元二次函数、方程和不等式

1.2.1 基本不等式



知识梳理

1. 基本不等式基本概念:

如果 $a > 0, b > 0$, 那么会有 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立

其中 $\frac{a+b}{2}$ 为正数 a, b 的算术平均数, $\sqrt{ab}$ 为正数 a, b 的几何平均数, 基本不等式可叙述

为: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

2. 几个重要的不等式

$$(1) a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R}).$$

$$(2) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 (a, b \text{ 同号}).$$

$$(3) ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbf{R}).$$

$$(4) \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} (a, b \in (0, +\infty)), \text{ 当且仅当 } a = b \text{ 时, 等号成立}$$

3. 利用基本不等式求最值:

在已知 $x > 0, y > 0$ 的条件下

(1) 如果积 xy 是定值 p , 那么当且仅当 $x = y$ 时, $x + y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$

(简记: 积定和最小).

(2) 如果 $x + y$ 是定值 s , 那么当且仅当 $x = y$ 时, xy 有最大值 $\frac{s^2}{4}$

(简记: 和定积最大).

注意: (1) 求最值时要注意三点: “一正” “二定” “三相等”.

所谓“一正”是指正数, “二定”是指应用基本不等式求最值时, 和或积为定值, “三相等”是指等号成立.

(2) 连续使用基本不等式时, 等号要同时成立

4. 基本不等式常用解题方法:

(1) 代入消元法: 代入消元法是将方程组中的一个方程的未知数用含有另一个未知数的代数式表示, 并代入到另一个方程中去, 这就消去了一个未知数, 得到一个解. 代入消元

法简称代入法。在解决不等式问题时,也可利用条件中的等量关系,将一个未知量由其他未知量表示,从而降低未知量个数,将不等式问题转化为求函数值域问题,降低计算技巧性和难度。

- (2)整体换元法:整体换元法是根据式子的结构特征,在求值过程中,直接将两个或多个变量的某种特定表达式当成一个整体来换元处理,从而建立已知和所求之间的关系或方程进行求解的方法。利用该方法求值,可以将多变量问题,转化为一个新变量问题,降低计算的复杂度。

【典型例题】



1.2.1.1 题型1: 均值不等式的概念与直接应用

提高专属

【例1】 难度 ★☆☆

下列不等式中正确的是

()

A. $a + \frac{4}{a} \geq 4$

B. $a^2 + b^2 \geq 4ab$

C. $\sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2}$

D. $x^2 + \frac{3}{x^2} \geq 2\sqrt{3}$

【例2】 难度 ★☆☆

求下列最值

- (1)已知 $x > 2$, 求 $y = x + \frac{1}{x-2}$ 的最小值;

(2) 已知 $x > 0$, 求 $y = 2 - x - \frac{4}{x}$ 的最大值;

(3) 已知 $x < \frac{5}{4}$, 求函数 $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x - 5}$ 的最大值.

【例3】 难度 ★☆☆

已知 $a, b > 0$, $a + b = 3$, 则 ab 的最大值为_____.

4

☆☆☆

(2014 年上海高考真题 5) 若实数 x, y 满足 $xy=1$, 则 x^2+2y^2 的最小值为_____.

【例 5】 难度 ☆☆☆

(2019 年上海高考真题 7) 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $\frac{1}{x}+2y=3$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.

【例 6】 难度 ☆☆☆

(2020 年天津高考真题 14) 已知 $a>0, b>0$, 且 $ab=1$, 则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.

【例 7】 难度 ☆☆☆

(2021 年天津高考真题 15) 已知 $a>0, b>0$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为_____.



1.2.1.2 题型 2: 均值不等式的拓展

目标、 菁英专属

完备的均值不等式

【例 1】 难度 ★★☆☆

(2014 上海春季高考真题第 22 题) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 若 $a + b = 4$, 则 ()A. $a^2 + b^2$ 有最小值B. $\sqrt{ab}$ 有最小值C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最大值D. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 有最大值

【例 2】 难度 ★★☆☆

(2015 福建卷高考真题文科第 5 题) 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(1, 1)$, 则 $a + b$ 的最小值等于 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【例 3】 难度 ★★☆☆

(多选题) 已知正数 a, b 满足 $2a + b = 1$, 则 ()A. ab 的最大值为 $\frac{1}{8}$ B. $4a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 4D. $ab + \frac{1}{ab}$ 的最小值为 2

【例 4】 难度 ★★☆☆

(2009 复旦大学自主招生选拔测试真题) 实数 $a, b, c \neq 0$, $\frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}, \frac{ab}{c}$ 成等差数列, 下列不等式一定成立的是 ()A. $|b| \leq |ac|$ B. $b^2 \geq |ac|$ C. $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ D. $|b| \leq \frac{|a| + |c|}{2}$

多元均值不等式

【例5】 难度 ★★★

(2013 湖南卷高考真题理科第10题) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a+2b+3c=6$, 则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为_____

【例6】 难度 ★★★

设 $x > y > z$, $n \in \mathbf{N}$, 且 $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} \geq \frac{n}{x-z}$ 恒成立, 则 n 的最大值是_____

【例7】 难度 ★★☆☆

已知正实数 a, b 满足 $a+2b=2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{9}{2}$

B. 9

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$



1.2.1.3 题型3: 均值不等式的轮换对称

【例1】 难度 ★☆☆

已知 $a, b > 0$, $a + b = 3$, 则 ab 的最大值为_____.

【例2】 难度 ★☆☆

(2011·浙江)若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $x + y$ 的最大值是_____.

【例3】 难度 ★☆☆

(2014年上海高考真题5)若实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.

4 ☆☆☆

已知正数 a, b 满足 $a + 2b = 1$, 则 $a^2 + 6ab + 4b^2$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. 1 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

【例5】 难度 ☆☆☆

已知正实数 a, b 满足 $a^2 + 3ab + 9b^2 = 6$, 则 $a + 3b$ 的最大值为 ()

- A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

【例6】 难度 ☆☆☆

(2019 年上海高考真题 7) 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $\frac{1}{x} + 2y = 3$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 _____.

【例7】 难度 ☆☆☆

(2013 湖南卷高考真题理科第 10 题) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a + 2b + 3c = 6$, 则 $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ 的最小值为 _____.

8

☆☆☆

(2020 年天津高考真题 14) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为 _____.

【例 9】 难度 ☆☆☆

(多选题) 早在公元前 6 世纪, 毕达哥拉斯学派已经知道算术中项、几何中项以及调和中项, 毕达哥拉斯学派哲学家阿契塔在《论音乐》中定义了上述三类中项, 后人在此基础上推导出一个基本不等式链, 即已知正实数 a, b , 有 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a+b+\sqrt{ab}=1$, 请利用上述不等关系, 判断下列说法正确的是 ()

A. $\frac{a^2+b^2}{ab}$ 的最小值为 2

B. ab 的最大值为 $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值为 6

D. $a+b$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$

【例 10】 难度 ☆☆☆

(2022 年新高考 II 卷真题 12 题) (多选题) 若 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()

A. $x+y \leq 1$

B. $x+y \geq -2$

C. $x^2 + y^2 \leq 2$

D. $x^2 + y^2 \geq 1$

1.2.2 基本不等式多选题



1.2.2.1 题型1:【数学思维】均值不等式多选题与应试思维综合运用

【例1】 难度 ★★☆☆

(多选题)下列选项正确的是

()

- A. 若 $a \neq 0$, 则 $a + \frac{4}{a}$ 的最小值为 4
- B. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值是 2
- C. 若 $ab < 0$, 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的最大值为 -2
- D. 若正实数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 8

【例2】 难度 ★★☆☆

(多选题) 设 a, b 为两个正数, 定义 a, b 的算术平均数为 $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $G(a, b) = \sqrt{ab}$, 则有: $G(a, b) \leq A(a, b)$, 这是我们熟知的基本不等式. 上个世纪五十年代, 美国数学家 D. H. Lehmer 提出了 “Lehmer 均值”, 即 $L_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}$, 其中 p 为有理数. 下列关系正确的是 ()

- A. $L_{0.5}(a, b) \leq A(a, b)$ B. $L_0(a, b) \geq G(a, b)$
- C. $L_2(a, b) \geq L_1(a, b)$ D. $L_{n+1}(a, b) \leq L_n(a, b)$

3

☆☆☆

(多选题)早在公元前6世纪,毕达哥拉斯学派已经知道算术中项、几何中项以及调和中项,毕达哥拉斯学派哲学家阿契塔在《论音乐》中定义了上述三类中项,后人在此基础上推导出一个基本不等式链,即已知正实数 a, b ,有 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.已知 $a>0, b>0$,且 $a+b+\sqrt{ab}=1$,请利用上述不等关系,判断下列说法正确的是

()

A. $\frac{a^2+b^2}{ab}$ 的最小值为2B. ab 的最大值为 $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值为6D. $a+b$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$

【例4】 难度☆☆☆

(多选题)(2022年新高考Ⅱ卷真题12题)若 x, y 满足 $x^2+y^2-xy=1$,则 ()

A. $x+y \leq 1$ B. $x+y \geq -2$ C. $x^2+y^2 \leq 2$ D. $x^2+y^2 \geq 1$

5

☆☆☆

对于题目：已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $xy = 2$, 求 $A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$ 最小值.

甲同学的解法：因为 $x > 0$, $y > 0$, 所以 $\frac{4}{x} > 0$, $\frac{2}{y} > 0$, 从而

$$A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = (2x + \frac{4}{x}) + (4y + \frac{2}{y}) \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}} + 2\sqrt{4y \cdot \frac{2}{y}} = 8\sqrt{2}$$

所以 A 的最小值为 $8\sqrt{2}$.

乙同学的解法：因为 $x > 0$, $y > 0$,

$$\text{所以 } A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 2x + 4y + \frac{4y + 2x}{xy} = 3x + 6y \geq 2\sqrt{3x \cdot 6y} = 12.$$

所以 A 的最小值为 12.

丙同学的解法：因为 $x > 0$, $y > 0$,

$$\text{所以 } A = 2x + 4y + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2x \cdot 4y} + 2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot \frac{2}{y}} = 12$$

①请对三位同学的解法正确性作出评价；

②为巩固学习效果，老师布置了另外一道题，请你解决：

已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab + 2a + b = 4$, 求 $M = 2a + b + \frac{4}{a+1} + \frac{8}{b+2}$ 的最小值.

1.3 函数的概念与性质

1.3.1 函数的概念及其表示



知识梳理

1. 函数的概念:

设 A 、 B 是非空的数集, 如果按照某个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个数 x , 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数. 记作: $y = f(x)$, $x \in A$.

其中, x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域; 与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做函数的值域.

理解: x 对应的 $f(x)$ 唯一确定.

2. 函数的三要素:

定义域: 自变量 x 的取值范围 A ;

对应关系: f , 通常可用解析式表示;

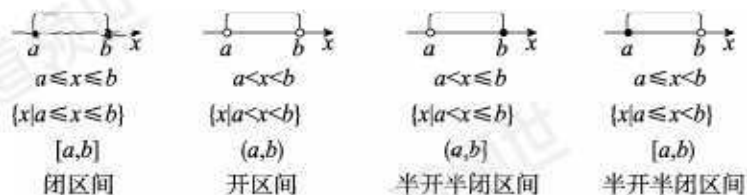
值域: 函数值 $f(x)$ 的集合, 值域是 B 的子集.

3. 求函数的定义域时列不等式组的主要依据是:

- (1) 分式的分母不等于零;
- (2) 偶次方根的被开方数不小于零;
- (3) 指数为零底不可以等于零;
- (4) 如果函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的, 那么, 它的定义域是使各部分都有意义的 x 的值组成的集合;
- (5) 实际问题中的函数的定义域还要保证实际问题有意义.

4. 区间:

设 a 、 b 是实数, 且 $a < b$. 满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的全体, 叫做闭区间, 记作 $[a, b]$, 如图, 其中 a 、 b 叫做区间的端点. 在数轴上表示一个区间时, 若区间包括端点, 则端点用实心点表示; 若区间不包括端点, 则端点用空心点表示.



全体实数也可用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$, 符号“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”.

5. 有关抽象函数定义域的求法:

求抽象函数的定义域, 如果没有弄清所给函数之间的关系, 求解容易出错误

例如: 已知 $y=f(x+2)$ 的定义域是 $[a, b]$, 求函数 $y=f(x)$ 的定义域

[误解] 因为函数 $y=f(x+2)$ 的定义域是 $[a, b]$, 所以得到 $a \leq x+2 \leq b$, 从而

$a-2 \leq x \leq b-2$, 所以函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a-2, b-2]$.

[正解] 因为函数 $y=f(x+2)$ 的定义域是 $[a, b]$, 则 $a \leq x \leq b$, 从而 $a+2 \leq x+2 \leq b+2$, 所

以函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a+2, b+2]$.

【典型例题】



1.3.1.1 题型1: 函数的定义域

提高、目标专属

【例1】 难度 ★☆☆

(2019年江苏高考真题4) 函数 $y = \sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是_____.

【例2】 难度 ★☆☆

(2012年广东高考文科真题11) 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域是_____.

3

☆☆☆

函数 $y = \frac{(x-1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是_____.

【例4】

难度 ☆☆☆

函数 $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是

()

A. $[-1, 1]$ B. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ C. $[0, 1]$ D. $\{-1, 1\}$

【例5】

难度 ☆☆☆

函数 $f(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$ 的定义域为 A , 函数 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-|x-a|}}$ 的定义域为 B , 则使 $A \cap B = \emptyset$

的实数 a 的取值范围是

()

A. $\{a \mid -1 < a < 3\}$ B. $\{a \mid -2 < a < 4\}$ C. $\{a \mid -2 \leq a \leq 3\}$ D. $\{a \mid -1 \leq a \leq 3\}$

6 ☆☆☆

(2013 年广西高考理科真题 4) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, -\frac{1}{2})$ C. $(-1, 0)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

【例 7】 难度 ☆☆☆

函数 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $[-1, 2]$, 则函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 ()

- A. $[0, 3]$ B. $[0, 2]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-2, 1]$

【例 8】 难度 ☆☆☆

函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2]$, 则函数 $y=f(1+x)+f(1-x)$ 的定义域为 ()

- A. $[-1, 3]$ B. $[0, 2]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-2, 2]$

【例 9】 难度 ☆☆☆

若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 1)$
C. $[0, 1) \cup (1, 4]$ D. $(0, 1)$

1.3.2 函数的基本性质



知识梳理

一、函数单调性

1. 函数的单调性定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I ，如果对于定义域 I 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数。区间 D 称为 $y=f(x)$ 的单调增区间；

如果对于区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。区间 D 称为 $y=f(x)$ 的单调减区间。

注意：(1) 函数的单调性是在定义域内的某个区间上的性质，是函数的局部性质；

(2) 必须是对于区间 D 内的任意两个自变量 x_1, x_2 ；当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)。

2. 图象的特点：如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，那么说函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性，在单调区间上增函数的图象从左到右是上升的，减函数的图象从左到右是下降的。

3. 函数单调区间与单调性的判定方法：

(1) 定义法：

- ① 任取 $x_1, x_2 \in D$ ，且 $x_1 < x_2$ ；
- ② 作差 $f(x_1) - f(x_2)$ ；
- ③ 变形(通常是因式分解和配方)；
- ④ 定号(即判断差 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负)；
- ⑤ 下结论(指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性)。

(2) 图象法(从图象上看升降)。

- (3) 复合函数的单调性：复合函数 $f[g(x)]$ 的单调性与构成它的函数 $u=g(x)$ ， $y=f(u)$ 的单调性密切相关，其规律如下：同增异减。

注意：函数的单调区间只能是其定义域的子区间，不能把单调性相同的区间和在一起写成其并集。

4. 判断函数的单调性常用的结论

- ① 函数 $y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的单调性相反；
- ② 当函数 $y=f(x)$ 恒为正或恒为负时， $y=\frac{1}{f(x)}$ 与函数 $y=f(x)$ 的单调性相反；
- ③ 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(x)+C$ (C 为常数) 的单调性相同；

④当 $C > 0$ (C 为常数) 时, $y = f(x)$ 与 $y = C \cdot f(x)$ 的单调性相同;

当 $C < 0$ (C 为常数) 时, $y = f(x)$ 与 $y = C \cdot f(x)$ 的单调性相反;

⑤函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是增(减)函数, 则 $f(x) + g(x)$ 仍是增(减)函数;

⑥若 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是增(减)函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 也是增(减)函数;

若 $f(x) < 0$, $g(x) < 0$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是增(减)函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 是减(增)函数;

⑦设 $f(x) > 0$, 若 $f(x)$ 在定义域上是增函数, 则 $\sqrt[n]{f(x)}$ 、 $k \cdot f(x)$ ($k > 0$)、 $f^n(x)$ ($n > 1$) 都是增函数, 而 $\frac{1}{f(x)}$ 是减函数.

⑧复合函数单调性的判断

$u = g(x)$	$y = f(u)$	$y = f[g(x)]$
增	增	增
增	减	减
减	增	减
减	减	增

复合函数单调性可简记为“同增异减”, 即内外函数的单调性相同时递增, 相异时递减.

5. 函数的最大(小)值定义

(1)一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足,

(i) 对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(x) \leq M$;

(ii) 存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$,

那么, 称 M 是函数 $y = f(x)$ 的最大值.

(2)一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 m 满足,

(i) 对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(x) \geq m$;

(ii) 存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = m$,

那么, 称 m 是函数 $y = f(x)$ 的最小值.

注意: (1) 函数最大(小)值首先应该是某一个函数值, 即存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$;

(2) 函数最大(小)值应该是所有函数值中最大(小)的, 即对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$).

6. 求函数的最大(小)值的方法

(1) 利用二次函数的性质(配方法)求函数的最大(小)值;

(2) 利用图象求函数的最大(小)值;

(3) 利用函数单调性的判断函数的最大(小)值.

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 在区间 $[b, c]$ 上单调递减则函数 $y = f(x)$ 在 $x = b$ 处有最大值 $f(b)$;

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递减, 在区间 $[b, c]$ 上单调递增则函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最小值 $f(b)$.

二、函数奇偶性

1. 偶函数定义: 一般地, 对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x , 都有 $f(-x)=f(x)$, 那么 $f(x)$ 就叫做偶函数.

2. 奇函数定义: 一般地, 对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x , 都有 $f(-x)=-f(x)$, 那么 $f(x)$ 就叫做奇函数.

注意: ①函数是奇函数或是偶函数称为函数的奇偶性, 函数的奇偶性是函数的整体性质;

②函数可能没有奇偶性, 也可能既是奇函数又是偶函数;

③由函数的奇偶性定义可知, 函数具有奇偶性的一个必要条件是, 对于定义域内的任意一个 x , 则 $-x$ 也一定是定义域内的一个自变量(即定义域关于原点对称),

3. 具有奇偶性的函数的图象的特征: 偶函数的图象关于 y 轴对称; 奇函数的图象关于原点对称.

4. 利用定义判断函数奇偶性的格式步骤

①首先确定函数的定义域, 并判断其定义域是否关于原点对称;

②确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系;

③得出相应结论,

若 $f(-x)=f(x)$, 则 $f(x)$ 是偶函数;

若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $f(x)$ 是奇函数;

若 $f(-x)=f(x)$ 且 $f(-x)=-f(x)$, 则 $f(x)$ 既是偶函数又是奇函数;

若 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$, 则 $f(x)$ 既不是偶函数也不是奇函数.

5. 函数奇偶性的性质

①奇函数在关于原点对称的两个区间上若有单调性, 则其在两个区间上的单调性相同; 偶函数在关于原点对称的两个区间上若有单调性, 则其在两个区间上的单调性相反;

②奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于 y 轴对称;

③若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$;

④若奇函数 $f(x)$ 定义域中含有 0, 则必有 $f(0)=0$;

⑤定义在关于原点对称区间上的任意一个函数, 都可表示成“一个奇函数 $F(x)$ 与一个偶函数 $G(x)$ 的和(或差)”.

如设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的任一函数, 则 $F(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, $G(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$;

⑥复合函数的奇偶性特点是: “内偶则偶, 内奇同外”;

⑦既奇又偶函数有无穷多个($f(x)=0$, 定义域是关于原点对称的任意一个数集).

三、函数周期性

1. 函数的周期性的定义:

对于函数 $f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得定义域内的每一个 x 值, 都满足 $f(x+T)=f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数, 非零常数 T 叫做这个函数的周期.

2. 抽象函数周期性:

(1) 函数值之和等于零

对于定义域中任意 x 满足 $f(a+x)+f(b+x)=0 (a \neq b)$, 则有 $f[x+(2b-2a)]=f(x)$, 故函数 $f(x)$ 的周期是 $T=2(b-a)$

(2) 函数图像有两条对称轴

函数图像有 $x=a, x=b (a \neq b)$ 两条对称轴, 即 $f(a+x)=f(a-x), f(b+x)=f(b-x)$, 从而得 $f[x+(2b-2a)]=f(x)$, 故函数 $f(x)$ 的周期是 $T=2(b-a)$;

(3) 两个函数值之积等于 ± 1

若 $f(x+a) \cdot f(x+b)=1 (a \neq b)$, 则得 $f(x+2a)=f[x+(2a)+(2b-2a)]=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期是 $T=2(b-a)$; 同理若 $f(x+a) \cdot f(x+b)=-1 (a \neq b)$, 则 $f(x)$ 的周期是 $T=2(b-a)$;

(4) 分式递推型

函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\frac{1+f(x+b)}{1-f(x+b)} (a \neq b)$, 得 $f(x+2a)=\frac{-1}{f(x+2b)}$, 进而得

$f(x+2a) \cdot f(x+2b)=-1$, 由前面的结论得 $f(x)$ 的周期是 $T=4(b-a)$.

四、常见恒成立解题思路

1. 变量分离法

变量分离法主要通过两个基本思想解决“恒成立问题”,

思路1: $m \geq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立 $\Leftrightarrow m \geq [f(x)]_{\max}$;

思路2: $m \leq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立 $\Leftrightarrow m \leq [f(x)]_{\min}$.

2. 构造函数法

(1) 一次函数型

若原题可化为一次函数型, 则由数形结合思想利用一次函数知识求解, 十分简捷. 给定一次函数 $y=f(x)=ax+b (a \neq 0)$, 若 $y=f(x)$ 在 $[m, n]$ 内恒有 $f(x) > 0$, 则根据函数的

图象(直线)可得上述结论等价于 $\begin{cases} f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$;

同理, 若在 $[m, n]$ 内恒有 $f(x) < 0$, 则有 $\begin{cases} f(m) < 0 \\ f(n) < 0 \end{cases}$.

(2) 二次函数型

若二次函数 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 大于 0 恒成立, 则有 $a > 0$ 且 $\Delta < 0$; 若是二次函数在指定区间上的恒成立问题, 可以利用韦达定理以及根的分布知识求解.

3. 数形结合法

若把等式或不等式进行合理的变形后, 将一个很难画图的复杂函数转化成两个容易画出图象的函数, 则可以通过函数图象直接判断得出结果.

4. 换元法

对于结构比较复杂的函数, 若把其中某些部分看成一个整体, 用一个新的字母代替, 即换元, 则能使复杂的问题简单化. 常用的换元方法有整体换元, 三角换元等.



1.3.2.1 题型 1: 复合函数的单调性

提高专属

【例1】 难度 ★☆☆

函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ 的单调增区间是 ()

- A. $(-\infty, -3)$ B. $[2, +\infty)$ C. $[0, 2)$ D. $[-3, 2]$

【例2】 难度 ★☆☆

函数 $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ 的递增区间是 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $[-5, -2]$ C. $[-2, 1]$ D. $[1, +\infty)$

【例3】 难度 ★☆☆

写出函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ 的单调区间及对应单调性.



A. $(2, 7)$

B. $(-2, 3)$

D. $(0, 5)$

【例 5】

A. $(4, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{3}{2})$

D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

【例 6】



预约陪陪 +wangyushu2013



1.3.2.2 题型 2: 分段函数的应用

提高专属

【例1】 难度 ★☆☆

已知 $f(x) = \begin{cases} 10, & x < 0 \\ 10x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[f(-7)]$.

【例2】 难度 ★☆☆

已知 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$, 若 $f(x) = 3$, 则 x 的值是 ()

A. 1

B. 1 或 $\frac{3}{2}$ C. 1, $\frac{3}{2}$ 或 $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

【例3】 难度 ★☆☆

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 则不等式 $f(x) \leq x$ 的解集为 ()

A. $[-1, 3]$ B. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ C. $[-3, 1]$ D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

4 ☆☆☆

若函数 $f(x) = \begin{cases} -x+3a, & x \geq 0 \\ x^2-ax+1, & x < 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

【例5】 难度 ☆☆☆

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2+2ax, & x \leq 1 \\ (2a-1)x-3a+6, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 对任意的 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{1}{2}, 1]$ B. $[1, 2]$ C. $[1, +\infty)$ D. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

【例6】 难度 ☆☆☆

函数 $f(x) = \begin{cases} x^2-x+1, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 的值域是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $[\frac{3}{4}, 1)$ D. $[\frac{3}{4}, +\infty)$

【例7】 难度 ☆☆☆

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x-4) > f(2x-3)$, 则实数 x 的取值范围是 ()

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1)$
C. $(-1, 4)$ D. $(-\infty, 1)$



1.3.2.3 题型 3: 一次分式函数的最值与值域

【例1】 难度 ★★☆☆

已知函数 $f(x) = \frac{3x+4}{2x+1}$,

- (1) 求函数的值域;
- (2) 若 $0 \leq x \leq 2$, 求函数的值域;
- (3) 若 $x \geq 0$, 求函数的值域.

【例2】 难度 ★★☆☆

函数 $y = \frac{3x}{3x-4}$ 的值域是 ()

- | | |
|---|---|
| A. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ | B. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| C. $(-\infty, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$ | D. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ |

3 ☆☆☆

记函数 $y = \frac{2x}{x-2}$ 在区间 $[3, 4]$ 上的最大值和最小值分别为 M 、 m ，则 $\frac{m^2}{M}$ 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{8}{3}$

【例4】 难度 ☆☆☆

(2016 北京高考文科真题 10) 函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ($x \geq 2$) 的最大值为_____.

【例5】 难度 ☆☆☆

函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 的值域是 ()

- A. $[-1, 1]$ B. $(-1, 1]$ C. $[-1, 1)$ D. $(-1, 1)$



1.3.2.4 题型 4: 二次分式最值速算技巧

【例 1】 难度 ★☆☆

$$y = \frac{x^2}{2x-1} \left(x > \frac{1}{2} \right), x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时, } y \text{ 取最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 2】 难度 ★☆☆

$$y = \frac{(x-1)^2}{x-2} (x > 2), x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时, } y \text{ 取最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 3】 难度 ★☆☆

$$y = \frac{x-2}{(x-1)^2} (x > 2), x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时, } y \text{ 取最大值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

4 ☆☆☆

设点 M 是直线 $y = -1$ 上的一个动点, O 为坐标原点, 过点 M 作 x 轴的垂线 l . 过点 O 作直线 OM 的垂线交直线 l 于 P .

(2) 过曲线 C 上的一点 P (异于原点 O) 作曲线 C 的切线 l_1 交椭圆 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ 于 A, B 两点, 求

$\triangle AOB$ 面积的最大值.

参考答案:

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} \times \frac{|m|}{1+k^2} \times \left(\frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{3k^2+4-m^2}}{3k^2+4} \right) = \frac{2\sqrt{3}|m| \times \sqrt{3k^2+4-m^2}}{3k^2+4} \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{m^2} \times \sqrt{3k^2+4-m^2}}{3k^2+4} \leq 2\sqrt{3} \times \frac{\frac{m^2+3k^2+4-m^2}{2}}{3k^2+4} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} 3k^2+4-m^2=m^2 \\ k^2+4m=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} m=-3-\sqrt{11} \\ k^2=12+4\sqrt{11} \end{cases} \text{ (此时满足 } 3k^2+4>m^2 \text{)} \text{ 时, 等号成立.}$$

故 $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

【例5】☆☆☆

抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 被直线 $y = 2x - 3$ 截得的弦的中点 M 的纵坐标为 1.

(2) 过抛物线的焦点 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与抛物线相交于 A, B 两点, 直线 l_2 与抛物线相交于 C, D 两点, 求四边形 $ACBD$ 的面积 S 的最小值.

参考答案:

$$\begin{aligned} \text{则四边形 } ACBD \text{ 的面积 } S &= |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(1+k^2)}{k^2} \cdot 4(k^2+1) \\ &= 8\left(k^2 + \frac{1}{k^2} + 2\right) \geq 16 + 16\sqrt{k^2 \cdot \frac{1}{k^2}} = 32, \end{aligned}$$

当且仅当 $k^2 = \frac{1}{k^2}$, 即 $k = \pm 1$ 时, 等号成立.

故所以四边形 $ACBD$ 的面积最小值为 32.

6

☆☆☆

已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 为双曲线的左、右焦点, 离心率为 2, 点 P 为双曲线在第一象限上的一点, 且满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, $|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| = 6$.

(2) 过点 F_2 作斜率不为 0 的直线 l 交双曲线于 A, B 两点; 则在 x 轴上是否存在定点 $Q(m, 0)$ 使得 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 为定值, 若存在, 请求出 m 的值及此时 $\triangle QAB$ 面积的最小值, 若不存在, 请说明理由.

参考答案:

$$\text{此时 } S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} |QF_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 3 \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{144t^2}{(3t^2-1)^2} - \frac{36}{3t^2-1}} = \frac{9\sqrt{t^2+1}}{|3t^2-1|},$$

$$\text{又 } y_1y_2 = \frac{9}{3t^2-1} < 0, 3t^2-1 < 0, \text{ 则 } S_{\triangle QAB} = \frac{9\sqrt{t^2+1}}{1-3t^2}, \text{ 令 } \sqrt{t^2+1} = u, \text{ 则 } u \geq 1,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle QAB} = \frac{9u}{4-3u^2} = \frac{9}{\frac{4}{u}-3u}, \text{ 又 } y = \frac{4}{u}-3u \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

所以当 $u=1$, 即 $t=0$, l 方程为 $x=2$ 时, $\triangle QAB$ 面积取到最小值, 且 $(S_{\triangle QAB})_{\min} = 9$.

7 ☆☆☆

已知 $A(-2, 0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点, 过点 $D(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交

于 P, Q 两点(异于点 A), 当直线 l 的斜率不存在时, $|PQ| = 3$.

(2) 求 $\triangle APQ$ 面积的最大值.

参考答案:

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 1 + m^2 \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{1+m^2}{(3m^2+4)^2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{1+m^2}} = 18 \cdot \frac{\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4},$$

令 $t = \sqrt{m^2+1}$, $t \geq 1$, 则 $m^2 = t^2 - 1$,

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} = \frac{18t}{3(t^2-1)+4} = \frac{18t}{3t^2+1} = \frac{18}{3t+\frac{1}{t}},$$

对于 $y = 3t + \frac{1}{t}$, $t \geq 1$,

由对勾函数的性质可得当 $t \geq 1$ 时, $y = 3t + \frac{1}{t}$ 单调递增,

所以当 $t = 1$ 时, $y_{\min} = 4$, $S_{\triangle APQ}$ 最大值为 $\frac{9}{2}$.



1.3.2.5 题型 5: 函数奇偶性的判断

【例1】 难度 ★☆☆

下列说法正确的是

()

- A. 如果一个函数的定义域关于坐标原点对称, 则这个函数为奇函数
- B. 如果一个函数为偶函数, 则它的定义域关于坐标原点对称
- C. 如果一个函数的定义域关于坐标原点对称, 则这个函数为偶函数
- D. 如果一个函数的图象关于 y 轴对称, 则这个函数为奇函数

【例2】 难度 ★☆☆

(2016 上海春季高考真题 21) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 “ $f(0)=0$ ” 是 “函数 $f(x)$ 为奇函数” 的

()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【例3】 难度 ★☆☆

判断奇偶性: $y=x^3+\frac{1}{x}$; $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$; $y=x^4+x$.

4

☆☆☆

判断奇偶性: $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; $y = m, m \in \mathbf{R}$.

【例 5】 题型 ☆☆☆

(2014 新课标 I 文科高考真题 5) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数



1.3.2.6 题型 6: 奇偶性的应用

【例1】 难度 ★☆☆

已知一个奇函数的定义域为 $\{-1, 2, a, b\}$, 则 $a+b=$ ()

- A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

【例2】 难度 ★☆☆

若函数 $y=(x+1)(x-a)$ 为偶函数, 则 $a=$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【例3】 难度 ★☆☆

若函数 $f(x)=\frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数, 则 $a=$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

4 ☆☆☆

函数 $f(x) = ax^2 + bx + 3a + b$ 是定义域为 $[a-1, 2a]$ 的偶函数, 则 $a+b$ 的值是 ()

- A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. -1

【例5】 难度 ☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$, 则 $f(-1) =$ ()

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -2

【例6】 难度 ☆☆☆

已知函数 $y = f(x) + x$ 是偶函数, 且 $f(2) = 1$, 则 $f(-2) =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -5 D. 5

【例7】 难度 ☆☆☆

已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 那么 $f(2)$ 等于 ()

- A. -26 B. -18 C. -10 D. 10

8

☆☆☆

已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 且 $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 1$, 则 $f(1) + g(1) =$ ()

A. -3

B. -1

C. 1

D. 3

【例9】 难度 ☆☆☆

已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x + 1$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) =$ _____.

【例10】 难度 ☆☆☆

函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x} + 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

【例11】 难度 ☆☆☆

已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(1 + \sqrt[3]{x})$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 表达式是 ()

A. $-x(1 + \sqrt[3]{x})$ B. $x(1 + \sqrt[3]{x})$ C. $-x(1 - \sqrt[3]{x})$ D. $x(1 - \sqrt[3]{x})$



1.3.2.7 题型7: 单调性与奇偶性综合应用

【例1】 难度 ★★★

(2014年新课标Ⅱ卷理科高考真题15) 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减, $f(2) = 0$, 若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围是_____.

【例2】 难度 ★★★

(2017年新课标Ⅰ卷理科高考真题5) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

【例3】 难度 ★★★

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(1) = g(1) = 0$, 则满足 $f(x)g(x) > 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ B. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

4

☆☆☆

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(2a-3) > f(-1)$ 的解集为

()

A. $(-1, 2)$ B. $(1, 2)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【例5】 难度☆☆☆

已知 $f(x) = x^2 + |x| + 1$, 若 $f(2m-1) < f(3)$, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(1, 2)$ B. $(-1, 2)$ C. $(-2, 1)$ D. $(-2, 2)$

【例6】 难度☆☆☆

已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-3, 3]$, 且在区间 $[-3, 0]$ 上单调递增, 则满足

$f(2-2m) + f(1-m^2) > 0$ 的实数 m 的取值范围是 ()

A. $[-3, \frac{1}{2}]$ B. $[-\frac{1}{2}, 2)$ C. $[-\frac{1}{2}, 1)$ D. $[-3, 1)$

7

☆☆☆

已知函数 $f(x) = -x|x|$, 且 $f(m+2) + f(2m-1) < 0$, 则实数 m 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, -\frac{1}{3})$

B. $(-\infty, 3)$

C. $(3, +\infty)$

D. $(-\frac{1}{3}, +\infty)$

【例8】☆☆☆

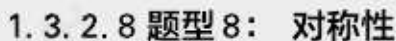
已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $a+b>0$, $b+c>0$, $a+c>0$, 则 $f(a)+f(b)+f(c)$ 的值 ()

A. 恒为正

B. 恒为负

C. 恒为0

D. 无法确定



函数 $y = \frac{x-1}{x-b}$ 的图象关于点 $(3, c)$ 中心对称, 则 $b+c =$ _____.

难度 ★★☆☆

(2021 年乙卷文科高考真题 9) 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()

- A. $f(x-1) - 1$
B. $f(x-1) + 1$
C. $f(x+1) - 1$
D. $f(x+1) + 1$

难度 ★★☆☆

(多选题) 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 那么 ()

- A. $f(2-x)=f(x)$ B. $f(1-x)=f(1+x)$
C. 函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数 D. 函数 $y=f(x-1)$ 是偶函数

4 ☆☆☆

若函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数, 则下列说法不正确的是 ()

- A. $y=f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称 B. $y=f(x+1)$ 图象关于 y 轴对称
C. 必有 $f(1+x)=f(-1-x)$ 成立 D. 必有 $f(1+x)=f(1-x)$ 成立

【例5】 难度 ☆☆☆

已知函数 $y=f(2x+1)$ 是偶函数, 则一定是函数 $y=f(2x)$ 图象的对称轴的直线是 ()

- A. $x=-\frac{1}{2}$ B. $x=0$ C. $x=\frac{1}{2}$ D. $x=1$

【例6】 难度 ☆☆☆

若函数 $f(x)=x^2+ax-2$ 对任何实数 x 都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立, 则 $f(x)$ 的值域为 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $[-2, +\infty)$
C. $[-3, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$



1.3.2.9 题型9(a): 抽象函数综合(上)



1.3.2.9 题型9(b): 抽象函数综合(下)

菁英专属

【例1】 ★★☆☆

定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x, y \in (-1, 1)$, 都有 $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy})$.

求证: $f(x)$ 为奇函数.

2 ☆☆☆

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, $f(0) \neq 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, 有 $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

- (1) 求证: $f(0) = 1$;
- (2) 求证: 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x) > 0$;
- (3) 求证: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;
- (4) 若 $f(x) \cdot f(2x - x^2) > 1$, 求 x 的取值范围.

3

☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 对一切实数 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, $f(3) = -2$.

- (1) 求 $f(0)$;
- (2) 试判定该函数的奇偶性;
- (3) 试判断该函数在 $\mathbf{R}$ 上的单调性;
- (4) 解不等式 $f(x^2 - 8x) \geq 8$.

4

☆☆☆

已知偶函数 $f(x)$ 的定义域是 $x \neq 0$ 的一切实数, 对定义域内的任意 x_1, x_2 都有 $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 且当 $x > 1$ 时 $f(x) > 0$, $f(2) = 1$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

(2) 解不等式 $f(2x^2 - 1) < 2$.

【例 5】☆☆☆

函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(4) = -4$, 求 $f(x) - f(\frac{1}{x-12}) \geq -12$ 的解集.

6

☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对任意实数 m, n 都有 $f(m+n) = f(m) + f(n) + \frac{1}{2}$, 且 $f(\frac{1}{2}) = 0$,

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x) > 0$.

(1) 求 $f(1)$;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并证明.



1.3.2.10 题型 10: 函数周期性

【例 1】 难度 ★★★

(2016 年华侨、港澳、台联考高考真题 13) 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 为周期函数, 其周期为 8, 当 $x \in [-4, 0]$ 时, $f(x) = x + 1$, 则 $f(25) =$ _____.

【例 2】 难度 ★★★

(2012 年江苏高考真题 10) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1, 1]$ 上,

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{bx+2}{x+1}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{其中 } a, b \in \mathbf{R}. \text{ 若 } f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right), \text{ 则 } a+3b \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 3】 难度 ★★★

已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+6) = f(x) + f(3)$, 且 $f(1) = 2$, 则 $f(2021)$ 的值为 _____ ()

A. 0

B. -2

C. 2

D. 6

4

☆☆☆

(1996年全国卷高考真题15) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2) = -f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(7.5)$ 等于 ()

A. 0.5

B. -0.5

C. 1.5

D. -1.5

【例5】 难度☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且满足 $f(x+1) + f(x) = 3$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2 - x$, 则 $f(-2007.5)$ 的值为 ()

A. 0.5

B. 1.5

C. -1.5

D. 1

【例6】 难度☆☆☆

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$, 且当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = 4x$, 则 $f(107.5)$ 等于 ()

A. 10

B. -10

C. $\frac{1}{10}$ D. $-\frac{1}{10}$

【例7】 难度☆☆☆

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且 $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $f(3) = 3$, 则 $f(2007) =$ _____.

【例8】 难度☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2) - f(x+1) + f(x) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$, 则 $f(2006) =$ _____.



1.3.2.11 题型 11: 对称性与周期性综合应用

菁英专属

【例 1】 难度 ★★★

(2014 年全国卷文科高考选择压轴题 12) 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x+2)$ 为偶函数, 且 $f(1)=1$, 则 $f(8)+f(9)=$ ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

【例 2】 难度 ★★★

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=f(2-x)+4f(2)$, 若函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称, 则 $f(2022)=$ ()

- A. 6 B. 3 C. 0 D. -3

【例 3】 难度 ★★★

已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, $f(x)=-f(4-x)$, 若 $f(1)=2$,

则 $\sum_{i=1}^{2022} f(i) =$ ()

- A. -50 B. 50 C. 2 D. 0

4

☆☆☆

设 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且满足 $f(1+x) = f(1-x)$, $f(2+x) = -f(2-x)$, 则 $f(x)$ 是 ()

- A. 奇函数, 又是周期函数
B. 奇函数, 但不是周期函数
C. 偶函数, 又是周期函数
D. 偶函数, 但不是周期函数

【例5】 难度☆☆☆

(2018 年新课标 II 卷文科高考选择压轴题 12) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$ ()

- A. -50
B. 0
C. 2
D. 50

【例6】 难度☆☆☆

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x+3) = f(3-x)$, $f(x+6) = -f(6-x)$, 且当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = a \cdot 2^x - 1$ ($a \in \mathbf{R}$), 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2023) =$ ()

- A. 14
B. 16
C. 18
D. 20

【例7】 难度☆☆☆

(2021 年甲卷理科高考选择压轴题 12) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f(\frac{9}{2}) =$ ()

- A. $-\frac{9}{4}$
B. $-\frac{3}{2}$
C. $\frac{7}{4}$
D. $\frac{5}{2}$



1.3.2.12 题型 12(a): 二次恒成立常见解题模板(上)



1.3.2.12 题型 12(b): 二次恒成立常见解题模板(下)

目标、菁英专属

【例1】 难度 ★★★

已知对于任意实数 x , $kx^2 - 2x + k > 0$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 1$ B. $k = 1$ C. $k \leq 1$ D. $k < 1$

【例2】 难度 ★★★

若关于 x 的不等式 $kx^2 + 2kx - k - 1 > 0$ 的解集为 $\emptyset$, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $[-\frac{1}{2}, 0)$ C. $[-\frac{1}{2}, 0]$ D. $(-\frac{1}{2}, 0]$

【例3】 难度 ★★★

若存在实数 x , 使得不等式 $x^2 - ax + a < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

4

☆☆☆

不等式 $x^2 - 2(a-2)x + a < 0$ 对任意 $x \in (1, 5)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $a > 5$ B. $a \geq 5$ C. $-5 < a < 5$ D. $-5 \leq a \leq 5$

【例5】 难度 ☆☆☆

已知函数 $f(x) = -x^2 - mx + 1$, 若对于任意 $x \in [m, m+1]$, 都有 $f(x) > 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

【例6】 难度 ☆☆☆

若不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 在 $x \in [-2, 0)$ 时恒成立, 则实数 a 的最大值为 ()

A. 0

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

7 ☆☆☆

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $ax^2 - 3x + a \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -\frac{3}{2}]$

B. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

C. $[\frac{3}{2}, +\infty)$

D. $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$

【例 8】 难度 ☆☆☆

已知函数 $f(x) = 4ax^2 + 4x - 1$, $\forall x \in (-1, 1)$, $f(x) < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

()

A. $a \leq -\frac{3}{4}$

B. $a < -1$

C. $-1 < a \leq \frac{3}{4}$

D. $a \leq -1$

【例 9】 难度 ☆☆☆

存在 $x \in [-1, 1]$, 使得 $x^2 + mx - 3m \geq 0$, 则 m 的最大值为

()

A. 1

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. -1

【例 10】 难度 ☆☆☆

不等式 $x^2 - ax + 3 < 0$ 存在正整数解, 则 a 的取值范围为_____.

11 ☆☆☆

对任意 $m \in [-1, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m$ 的值恒大于零, 求 x 的取值范围.

【例 12】 题型 ☆☆☆

设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$.

- (1) 若对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围;
 (2) 若对 $m \in [-2, 2]$, $f(x) < -m + 5$ 恒成立, 求 x 的取值范围.

1.4 指数函数与对数函数

1.4.1 对数



知识梳理

- 对数定义: 如果 $a(a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 的 b 次幂等于 N , 即 $a^b = N$, 那么 b 可以称为以 a 为底 N 的对数, 记作 $\log_a N = b$, 其中 a 称对数的底, N 称真数.
 - 以 10 为底的对数称常用对数, $\log_{10} N$ 记作 $\lg N$;
 - 以无理数 $e(e = 2.71828\cdots)$ 为底的对数称自然对数, $\log_e N$, 记作 $\ln N$;
- 对数基本性质:
 - 真数 N 为正数(负数和零无对数);
 - $\log_a 1 = 0$;
 - $\log_a a = 1$;
 - 对数恒等式: $a^{\log_a N} = N$.
- 对数运算性质: 如果 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$, 则
 - $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$;
 - $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;
 - $\log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R})$.
- 换底公式: $\log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a} (a > 0, a \neq 1, m > 0, m \neq 1, N > 0)$,
 - $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;
 - $\log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b$.



1.4.1.1 题型 1: 对数运算法则

提高专属

【例 1】 难度 ★☆☆

用 $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$ 表示下列各式:

(1) $\lg(xyz)$;

(2) $\lg \frac{xy^3}{z}$;

(3) $\lg \frac{xy^3}{\sqrt{z}}$;

(4) $\lg \frac{\sqrt{x}}{y^2 z}$.

【例 2】 难度 ★☆☆

计算下面各题

(1) (2013 年四川高考真题 11) $\lg \sqrt{5} + \lg \sqrt{20}$ 的值是_____.

(2) (2015 年安徽高考真题 12) $\lg \frac{5}{2} + 2\lg 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$ _____.

(3) (2015 年浙江高考真题 5) 计算: $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} =$ _____, $2^{\log_2 3 + \log_2 5} =$ _____.

(4) (2014 年陕西高考真题 12) 已知 $4^a = 2$, $\lg x = a$, 则 $x =$ _____.

3 ☆☆☆

(2020 年新课标Ⅲ高考真题 4) Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领域. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 Logistic 模型:

$$I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-51)}}, \text{ 其中 } K \text{ 为最大确诊病例数. 当 } I(t^*) = 0.95K \text{ 时, 标志着已初步遏制疫}$$

情, 则 t^* 约为 ($\ln 19 \approx 3$)

()

A. 60

B. 63

C. 66

D. 69

【例 4】 难度 ☆☆☆

(2014 年四川高考真题 7) 已知 $b > 0$, $\log_5 b = a$, $\lg b = c$, $5^d = 10$, 则下列等式一定成立的是

()

A. $d = ac$ B. $a = cd$ C. $c = ad$ D. $d = a + c$

【例 5】 难度 ☆☆☆

计算下列各式的值:

$$(1) (\lg 5)^2 + 2\lg 2 - (\lg 2)^2;$$

$$(2) \frac{\lg 3 + \frac{2}{5}\lg 9 + \frac{3}{5}\lg \sqrt{27} - \lg \sqrt{3}}{\lg 81 - \lg 27}.$$



1.4.1.2 题型2: 换底公式

提高、目标专属

【例1】 难度 ★☆☆

(1980年全国高考真题4)证明对数换底公式: $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ (a, b, N 都是正数, $a \neq 1, b \neq 1$).

【例2】 难度 ★☆☆

利用对数的换底公式化简下列各式:

- (1) $\log_a c \cdot \log_c a$;
- (2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$;
- (3) $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$;
- (4) $\log_8 9 \cdot \log_9 10 \cdot \log_{10} 11 \cdot \dots \cdot \log_{31} 32$.

3 ☆☆☆

(2021 年天津高考真题 14) 若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ ()

- A. -1 B. $\lg 7$ C. 1 D. $\log_7 10$

【例 4】 例题 ☆☆☆

(2010 辽宁高考真题 5) 若 $2^a = 5^b = m$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$, 则 $m =$ ()

- A. $\sqrt{10}$ B. 10 C. 20 D. 100

【例 5】 例题 ☆☆☆

已知 a, b, c 均为正数, 且都不等于 1, 若实数 x, y, z 满足 $a^x = b^y = c^z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, 则 abc 的值等于 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6

☆☆☆

如果 $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$, 则 $\frac{\lg 12}{\lg 15}$ 等于

()

A. $\frac{2m+n}{1+m+n}$

B. $\frac{m+2n}{1+m+n}$

C. $\frac{2m+n}{1-m+n}$

D. $\frac{m+2n}{1-m+n}$

【例7】 难度 ☆☆☆

若 $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$, 则 $\log_{45} 12 =$

()

A. $\frac{2a+b}{2a+b+1}$

B. $\frac{2a+2b}{a+2b+1}$

C. $\frac{2a+b}{a+2b-1}$

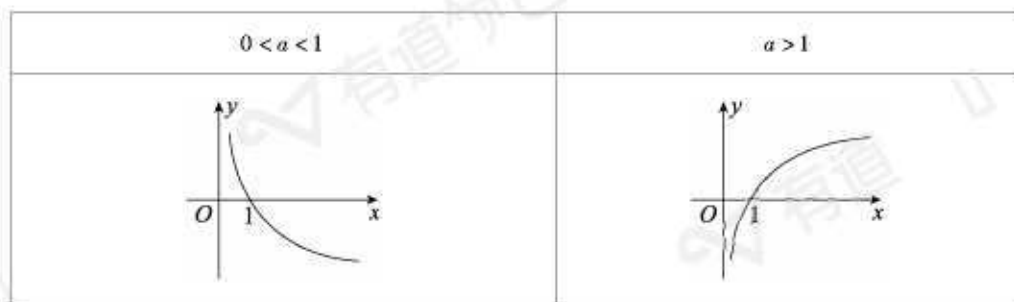
D. $\frac{2a+b}{-a+2b+1}$

1.4.2 对数函数



知识梳理

1. 对数函数的定义: 函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 被称为对数函数.
2. 对数函数的性质:
 - (1) 对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$;
 - (2) 对数函数的值域为 $\mathbf{R}$;
 - (3) 当 $0 < a < 1$ 时, 对数函数为减函数, 当 $a > 1$ 时, 对数函数为增函数;
 - (4) 对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 互为反函数.
3. 对数函数的图象:



- (1) 对数函数的图象都经过点 $(1, 0)$, 且图象都在第一、四象限;
 - (2) 对数函数都以 y 轴为渐近线(当 $0 < a < 1$ 时, 图象向上无限接近 y 轴; 当 $a > 1$ 时, 图象向下无限接近 y 轴);
 - (3) 对于相同的 a ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 函数 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象关于 x 轴对称.
4. 对数函数函数值的变化特征:

$0 < a < 1$	$a > 1$
① $x > 1$ 时 $y < 0$, ② $x = 1$ 时 $y = 0$, ③ $0 < x < 1$ 时 $y > 0$.	① $x > 1$ 时 $y > 0$, ② $x = 1$ 时 $y = 0$, ③ $x < 1$ 时 $0 < y < 1$.



1.4.2.1 题型 1(a): 指对幂比大小(上)



1.4.2.1 题型 1(b): 指对幂比大小(下)

【例 1】 难度 ★☆☆

(2017 华侨、港澳台联考真题 8) 设 $0 < a < 1$, 则 ()

- A. $\log_2 a > \log_{\sqrt{2}} \sqrt{a}$ B. $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a} > \log_{\sqrt{2}} a$
 C. $\log_2 a > \log_{\sqrt{2}} a$ D. $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a} < \log_{\sqrt{2}} a$

【例 2】 难度 ★☆☆

(2016 新课标 I 卷高考真题 8) 若 $a > b > 0$, $0 < c < 1$, 则 ()

- A. $\log_a c < \log_b c$ B. $\log_c a < \log_c b$ C. $a^c < b^c$ D. $c^a > c^b$

【例 3】 难度 ★☆☆

(2015 山东卷高考真题文科第 3 题) 设 $a = 0.6^{0.6}$, $b = 0.6^{1.5}$, $c = 1.5^{0.6}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

4

☆☆☆

已知 $a = \log_2 5$, $b = \log_2 6$, $c = \log_6 2$, 则三者大小关系为_____.

【例5】☆☆☆

(2021 新高考 II 卷高考真题 7) 已知 $a = \log_3 2$, $b = \log_3 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是

- ()
- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

【例6】☆☆☆

(2020 新课标 III 卷高考真题 10) 设 $a = \log_3 2$, $b = \log_3 3$, $c = \frac{2}{3}$, 则 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

7 ☆☆☆

(2020 新高考天津卷高考 6) 设 $a = 3^{0.7}$, $b = (\frac{1}{3})^{-0.8}$, $c = \log_{0.7} 0.8$, 则 a, b, c 的大小关系为

- ()
- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【例 8】 难度 ☆☆☆

(2021 新高考天津卷高考真题 5) 设 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_7 0.4$, $c = 0.4^{0.3}$, 则三者大小关系为

- ()
- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

【例 9】 难度 ☆☆☆

(2013 新课标 II 卷高考真题理科第 8 题) 设 $a = \log_3 6$, $b = \log_5 10$, $c = \log_7 14$, 则 ()

- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

10

☆☆☆

(2018 新课标Ⅲ高考真题 12) 设 $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则 ()

A. $a + b < ab < 0$

B. $ab < a + b < 0$

C. $a + b < 0 < ab$

D. $ab < 0 < a + b$

【例 11】 难度 ☆☆☆

设 x, y, z 为正数, 且 $3^x = 4^y = 5^z$, 则 ()

A. $x < y < z$

B. $y < x < z$

C. $y < z < x$

D. $z < y < x$

【例 12】 难度 ☆☆☆

设 x, y, z 均大于 1, 且 $\log_{\sqrt{x}} \frac{1}{x} = \log_{\sqrt{y}} \frac{1}{y} = \log_{\sqrt{z}} \frac{1}{z}$, 令 $a = x^{\frac{1}{3}}$, $b = y^{\frac{1}{3}}$, $c = z^{\frac{1}{6}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $b > a > c$

13 ☆☆☆

(2020 年新课标Ⅲ高考真题 12) 已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_4 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_{13} 8$, 则

()

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

【例 14】☆☆☆

(2020 年新课标 I 高考真题 12) 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_2 b$, 则

()

A. $a > 2b$

B. $a < 2b$

C. $a > b^2$

D. $a < b^2$

1.4.3 函数的应用



知识梳理

1. 函数图象的判断

函数图象的判断主要分为两个方面:

- (1) 看整体: 包括定义域、奇偶性、对称性等;
- (2) 看局部: 包括特殊点(零点、端点、分段点等)、函数正负性、函数走势等.

2. 函数图象的变换

- (1) 平移变换: 左加右减, 上加下减;
- (2) 伸缩变换:

纵向拉伸 n 倍 $\rightarrow y$ 变为原来的 n 倍; 纵向压缩 n 倍 $\rightarrow y$ 变为原来的 $\frac{1}{n}$;

横向拉伸 n 倍 $\rightarrow x$ 变为原来的 $\frac{1}{n}$; 横向压缩 n 倍 $\rightarrow x$ 变为原来的 n 倍;

- (3) 对称变换:

① 关于 $x=m$ 型对称: 若 $f(a+x)=g(b-x)$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称;

② 关于 $y=m$ 型对称: 若 $f(x)+g(x)=a$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于 $y=\frac{a}{2}$ 对称;

③ 关于 $y=\pm x$ 对称: 主要考察指对函数, 指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 天然地关于 $y=x$ 对称.

3. 零点存在性定理判断零点/交点所在区间

核心思想: 利用零点存在性定理, 带入区间两端, 看是否变号.

零点存在性定理: 一般的, 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么, 函数在区间 (a, b) 内有零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

4. 判断零点/交点个数

核心思想: 数形结合, 画出两个函数图象找交点.

步骤如下:

- ① 将不同类型的函数分至等式两侧;
- ② 较为精准地画出图象观察交点个数, 主要可以从这几个方面入手: 单调性、特殊点、变化趋势、对称性等.

5. 已知交点求参数问题

核心思想：将含参部分转化成易于处理的形式，数形结合找临界点。

步骤如下：

- ①将含参部分转化成易于处理的函数形式，比如 $y = 3x + a$ 、 $y = kx + 2$ 、 $y = ax^2$ 等；
- ②画出不含参部分的函数图象；
- ③画出含参函数与不含参函数相交（或者满足题中条件）的临界点，求临界值；
- ④根据参数对函数的变化影响，确定参数范围。



1.4.3.1 题型 1：函数图象变换

目标、菁英专属

【例 1】 难度 ☆☆☆

若函数 $y = \frac{x+4}{2x+4}$ 的图象经过()可以得到函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象。

- A. 向右平移 2 个单位，向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位
- B. 向左平移 2 个单位，向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位
- C. 向右平移 2 个单位，向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位
- D. 向左平移 2 个单位，向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位

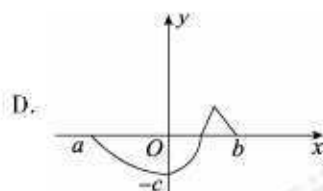
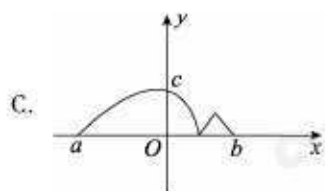
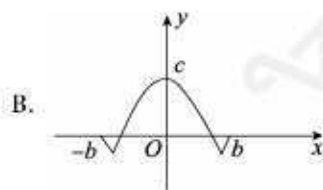
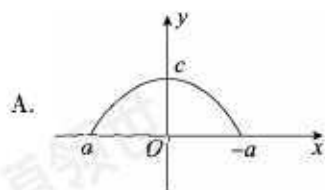
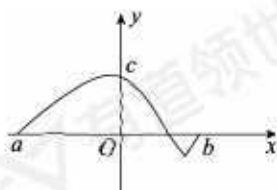
【例 2】 难度 ☆☆☆

为了得到函数 $y = f(-2x)$ 的图象，可以把函数 $y = f(1-2x)$ 的图象适当平移，这个平移是 ()

- A. 沿 x 轴向右平移 1 个单位
- B. 沿 x 轴向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位
- C. 沿 x 轴向左平移 1 个单位
- D. 沿 x 轴向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位

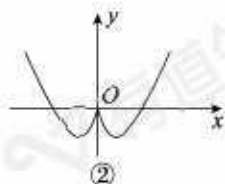
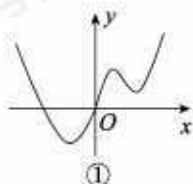
3 ☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $f(|x|)$ 的图象是 ()



【例4】☆☆☆

已知图①中的图象对应的函数 $y=f(x)$, 则图②中的图象对应的函数是 ()



A. $y=f(|x|)$

B. $y=|f(x)|$

C. $y=f(-|x|)$

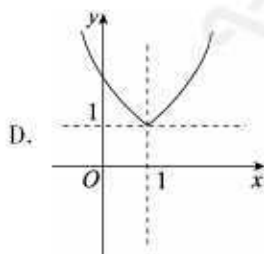
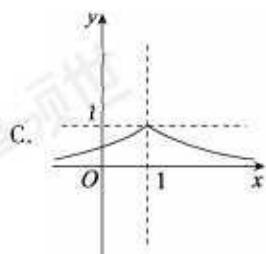
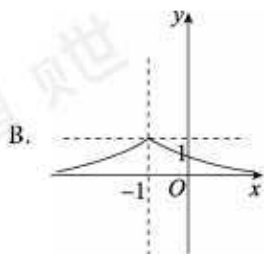
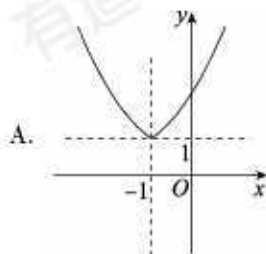
D. $y=-f(|x|)$

5

☆☆☆

函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}$ 的图象大致为

()

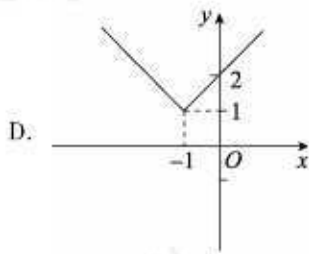
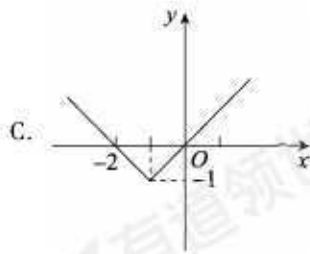
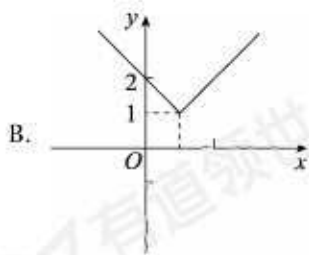
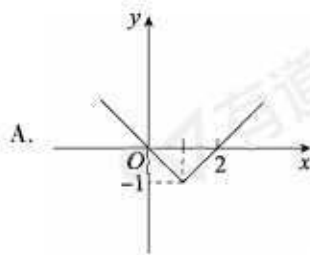


【例6】

☆☆☆

函数 $y = |x+1| - 1$ 的图象是

()



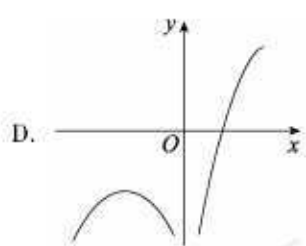
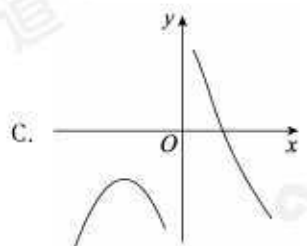
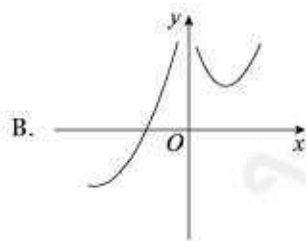
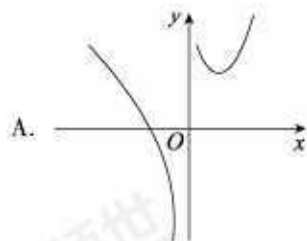


1.4.3.2 题型2: 复杂函数图象

【例1】 难度 ★★★

函数 $f(x) = e^{\ln|x|} + \frac{1}{x}$ 的图象大致为

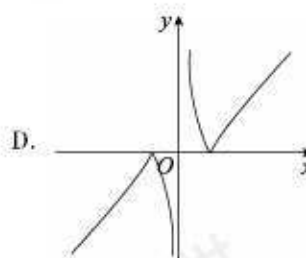
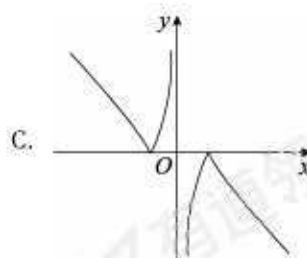
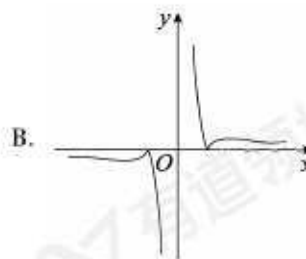
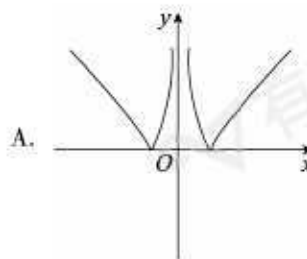
()



【例2】 难度 ★★★

(2022 年天津卷高考真题 3) 函数 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}$ 的图象为

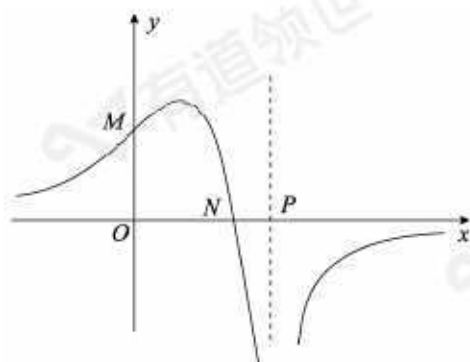
()



3 ☆☆☆

(2022 年安徽卷高考真题 9) 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示, 则下列结论成立的是

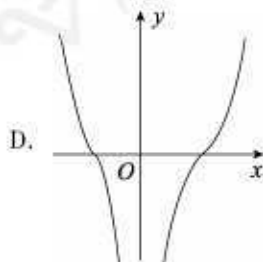
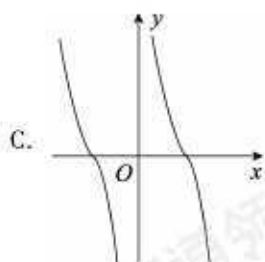
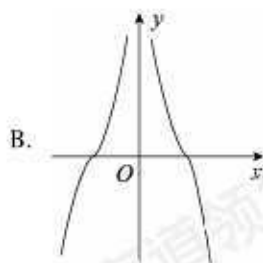
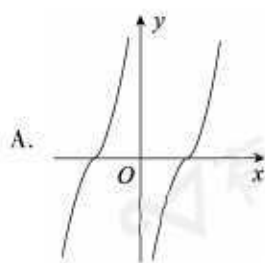
()

A. $a > 0, b > 0, c < 0$ B. $a < 0, b > 0, c > 0$ C. $a < 0, b > 0, c < 0$ D. $a < 0, b < 0, c < 0$

【例 4】 难度 ☆☆☆

函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ 的图象大致为

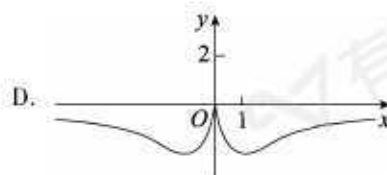
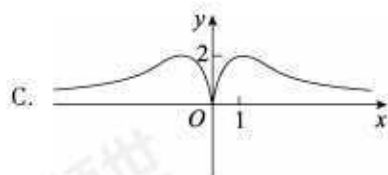
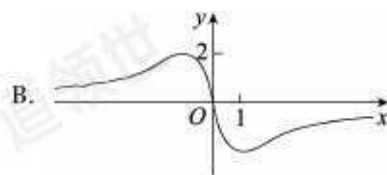
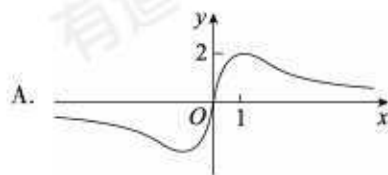
()



5

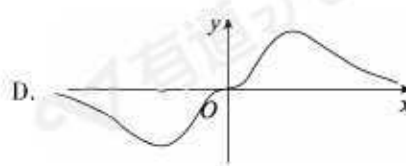
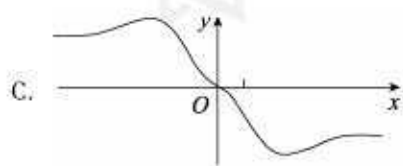
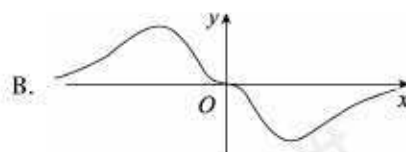
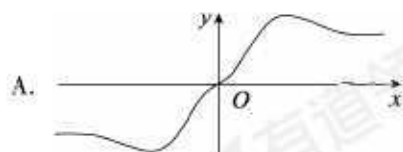
☆☆☆

(2020 天津卷高考真题第 3 题) 函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ()



【例 6】☆☆☆

函数 $f(x) = \frac{x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 的部分图象大致为 ()

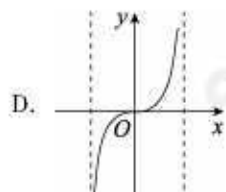
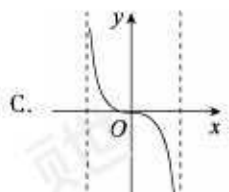
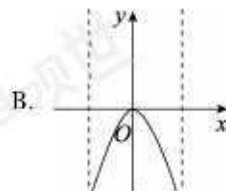
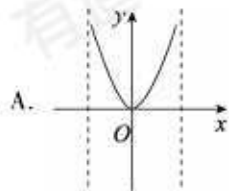


7



函数 $f(x) = x \ln\left(\frac{2}{1-x} - 1\right)$ 的图象大致为

()





1.4.3.3 题型3: 零点个数问题(基础)

【例1】 难度 ★★★

(2015年湖南卷高考真题14)已知函数 $f(x) = |2^x - 2| - b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是_____.

【例2】 难度 ★★★

(2010年全国卷大纲版高考真题15)直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2 - |x| + a$ 有四个交点, 则 a 的取值范围是_____.

【例3】 难度 ★★★

(2013年天津卷高考真题7)函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 的零点个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4

☆☆☆

(2014 年山东卷高考真题 8) 已知函数 $f(x) = |x-2| + 1$, $g(x) = kx$. 若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, +\infty)$

【例 5】 难度 ☆☆☆

(2018 年新课标 I 卷理科高考真题 9) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$

存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[-1, 0)$

B. $[0, +\infty)$

C. $[-1, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$



1.4.3.4 题型4: 零点个数问题(进阶)

菁英专属

【例1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f[f(x)] - 2$ 的零点个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

【例2】 难度 ★★★

设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg|x+1||, & x \neq -1, \\ 0, & x = -1, \end{cases}$ 要使关于 x 的函数 $F(x) = f^2(x) + bf(x) + c$

有7个零点, 则 b, c 满足的条件为 ()

- A. $b > 0, c > 0$ B. $b < 0, c > 0$
C. $b < 0, c = 0$ D. $b < 0, c < 0$

【例3】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 7, & x \geq 3 \\ |\log_2(x+1)|, & -1 < x < 3 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + m + 3 = 0$ 有6

个根, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 2 - 2\sqrt{3})$ B. $(-2, 2 - 2\sqrt{3})$
C. $(-\frac{7}{3}, 0)$ D. $(-\frac{7}{3}, -2)$



1.4.3.5 题型 5: 一元二次方程根的分布

【例1】 难度 ★★☆☆

关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$ 有两个正的实数根, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $m > 0$ B. $m \geq 0$ C. $m \geq 1$ D. $m > 1$

【例2】 难度 ★★☆☆

(2013 年重庆卷理科高考真题 6) 若 $a < b < c$, 则函数 $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间 ()

- A. (a, b) 和 (b, c) 内 B. $(-\infty, a)$ 和 (a, b) 内
C. (b, c) 和 $(c, +\infty)$ 内 D. $(-\infty, a)$ 和 $(c, +\infty)$ 内

【例3】 难度 ★★☆☆

若关于 x 的方程 $x^2 - tx + 1 = 0$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 且满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$, 则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $(2, 5)$ B. $(2, \frac{5}{2})$
C. $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ D. $(-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$

4 ☆☆☆

关于 x 的方程 $x^2 + (1 + \frac{2}{a})x + 9 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 1 < x_2$, 那么 a 的取值范围是 ()

A. $(-\frac{2}{7}, \frac{2}{5})$

B. $(\frac{2}{5}, +\infty)$

C. $(-\infty, -\frac{2}{7})$

D. $(-\frac{2}{11}, 0)$

【例5】 难度 ★★☆☆

已知关于 x 的方程 $ax^2 + (a-3)x + 1 = 0$ 在区间 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上存在两个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

B. $(9, +\infty)$

C. $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$

D. $(-\infty, \frac{2}{3})$

【例6】 难度 ★★☆☆

关于 x 的方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 在 $[0, 2]$ 内有解, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2]$

B. $[2, +\infty)$

C. $(-\infty, -\frac{5}{2}]$

D. $[\frac{5}{2}, +\infty)$



1.4.3.6 题型6: 【数学思维】函数的建模与应用 精英专属

【例1】 难度 ★★☆☆

某广告公司要为客户设计一幅周长为 l (单位: m) 的矩形广告牌, 如何设计这个广告牌可以使广告牌的面积最大?

【例2】 难度 ★★☆☆

第19届亚运会于2023年9月23日至10月8日在我国杭州举行, 本届亚运会的吉祥物是一套机器人, 包括三个: “琮琤”代表世界遗产良渚古城遗址, “莲莲”代表世界遗产西湖, “宸宸”代表世界遗产京杭大运河. 某公益团队计划举办杭州亚运会吉祥物的展销会, 并将所获利润全部用于社区体育设施建设. 已知每套吉祥物的进价为 $(50+a)$ 元, 其中 a 与进货量成反比, 当进货1万套时, a 为9元, 据市场调查, 当每套吉祥物的售价定为 x 元时 ($x < 100$), 销售量可达到 $(10 - \frac{x}{10})$ 万套, 若展销的其他费用为1万元, 且所有进货都销售完.

- (1) 每套吉祥物售价定为70元时, 能获得的总利润是多少万元?
- (2) 当 x 为多少时, 每套吉祥物的净利润最大?

3 ☆☆☆

近年来,受全球新冠肺炎疫情影响,不少外贸企业遇到展会停办、订单延期等困难,在该形势面前,某城市把目光投向了国内大市场,搭建夜间集市,不仅能拓宽适销对路的出口产品内销渠道,助力外贸企业开拓国内市场,更能推进内外贸一体化发展,加速释放“双循环”活力.某夜市的一位文化工艺品售卖者,通过对每天销售情况的调查发现:该工艺品在过去的一个月(按30天计),每件的销售价格 $f(x)$ (单位:元)与时间 x (单位:天)($1 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*$)的函数关系满足 $f(x) = 10 + \frac{k}{x}$ (k 为常数,且 $k > 0$),日销售量 $g(x)$ (单位:件)与时间 x 的部分数据如下表所示:

x	15	20	25	30
$g(x)$	105	110	105	100

设该文化工艺品的日销售收入为 $M(x)$ (单位:元),且第15天的日销售收入为1057元.

(1)求 k 的值;

(2)给出以下四种函数模型:

① $g(x) = ax + b$; ② $g(x) = a|x - m| + b$; ③ $g(x) = a \cdot b^x$; ④ $g(x) = a \cdot \log_b x$.

请你根据上表中的数据,从中选择最合适的一种函数模型来描述日销售量 $g(x)$ 与时间 x 的变化关系,并求出该函数的解析式;

(3)利用问题(2)中的函数 $g(x)$,求 $M(x)$ 的最小值.

 $(\quad)$

- A. 1.5

- B. 1.2

- C. 0.8

- D. 0.6

FREE ★★☆☆

 $(\quad)$

- A. 1, 2 天

- B. 1.8 天

- C. 2.5 天

- D. 3.5 天

3 ☆☆☆

(2019 全国课标 II 卷高考真题理科第 4 题) 2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆, 我国航天事业取得又一重大成就. 实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系. 为解决这个问题, 发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”, 鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行. L_2 点是平衡点, 位于地月连线的延长线上. 设地球质量为 M_1 , 月球质量为 M_2 , 地月距离为 R , L_2 点到月球的距离为 r , 根据牛顿运动

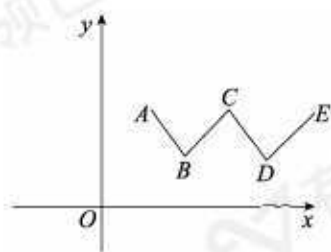
定律和万有引力定律, r 满足方程: $\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = (R+r) \frac{M_1}{R^3}$. 设 $\alpha = \frac{r}{R}$. 由于 α 的值很小,

因此在近似计算中 $\frac{3\alpha^3 + 3\alpha^4 + \alpha^5}{(1+\alpha)^2} \approx 3\alpha^3$, 则 r 的近似值为 ()

- A. $\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} R$ B. $\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}} R$ C. $\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}} R$ D. $\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} R$

【例 4】 难度 ☆☆☆

(2016 上海春季高考真题第 32 题) 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是折线 $ABCDE$, 如图, 其中 $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$, $D(4, 1)$, $E(5, 2)$, 若直线 $y=kx+b$ 与 $y=f(x)$ 的图象恰有四个不同的公共点, 则 k 的取值范围是 ()



- A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
C. $(0, 1]$ D. $[0, \frac{1}{3}]$

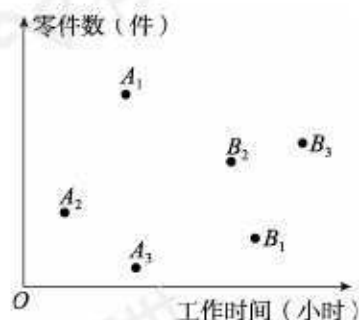
5

☆☆☆

(2017 北京卷高考真题理科填空压轴第 14 题) 三名工人加工同一种零件, 他们在一天中的工作情况如图所示, 其中 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数, 点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数, $i=1, 2, 3$.

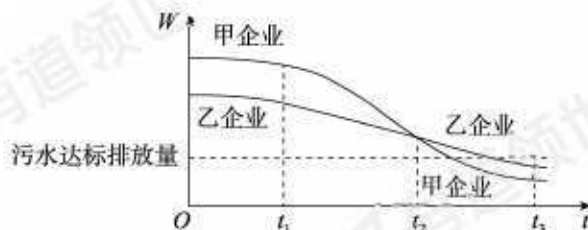
(1) 记 Q_i 为第 i 名工人在这一天中加工的零件总数, 则 Q_1, Q_2, Q_3 中最大的是_____.

(2) 记 p_i 为第 i 名工人在这一天中平均每小时加工的零件数, 则 p_1, p_2, p_3 中最大的是_____.



【例 6】 难度 ☆☆☆

(2020 新高考北京卷高考真题填空压轴第 15 题) 为满足人民对美好生活的向往, 环保部门要求相关企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改. 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$, 用 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱. 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示.



给出下列四个结论:

- ①在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
- ②在 t_2 时刻, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
- ③在 t_3 时刻, 甲、乙两企业的污水排放都已达标;
- ④甲企业在 $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ 这三段时间中, 在 $[0, t_1]$ 的污水治理能力最强.

其中所有正确结论的序号是_____.

1.4.5.1 题型1: 【数学思维】函数多选题与应试思维综合运用

(多选) 已知函数 $f(x) = \ln |x-2| - \ln |x|$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ B. $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增
- C. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称 D. $f(\frac{7}{2}) + f(\log_2 \frac{1}{3}) < 0$

(多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $\forall x, y \in (0, +\infty)$ 都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 且当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 且 $f(\frac{1}{2}) = -1$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(1) = 0$
B. 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
C. $f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + \cdots + f(2024) + f(\frac{1}{2024}) = 2024$
D. 满足不等式 $f(x) - f(x-2) \geq 2$ 的 x 的取值范围是 $(2, \frac{8}{3}]$

3 ☆☆☆

(多选) 已知连续函数 $f(x)$ 满足: ① $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 则有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, ② 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 1$, ③ $f(1) = -2$, 则以下说法正确的是 ()

- A. $f(0) = 1$
 B. $f(4x) = 4f(x) - 4$
 C. $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最大值是 10
 D. 不等式 $f(3x^2) - 2f(x) > f(3x) + 4$ 的解集为 $\{x \mid \frac{2}{3} < x < 1\}$

【例4】 难度 ☆☆☆

(多选) 若 $f(x)$ 满足对任意的实数 a, b 都有 $f(a+b) = f(a)f(b)$, 且 $f(1) = 2$, 则下列判断正确的有 ()

- A. $f(x)$ 是奇函数
 B. $f(x)$ 在定义域上单调递增
 C. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 函数 $f(x) < 1$
 D. $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)}{f(5)} + \dots + \frac{f(2016)}{f(2015)} + \frac{f(2018)}{f(2017)} + \frac{f(2020)}{f(2019)} = 2020$

【例5】 难度 ☆☆☆

(多选) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的连续函数 $f(x)$ 不是常函数, 且 $\frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)f(y)} - \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} + 2$, 则 ()

- A. $f(0) = \frac{1}{4}$
 B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 1$
 C. $f(x)$ 可能是增函数
 D. $f(x)$ 的图象关于点 $(0, \frac{1}{2})$ 对称

1.5 三角函数

1.5.1 任意角和弧度制



知识梳理

1. 角的正负

- ①正角：按逆时针方向旋转形成的角
- ②负角：按顺时针方向旋转形成的角
- ③零角：不作任何旋转的角

2. 象限角：角 α 的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边落在第几象限，则称 α 为第几象限角.

- ①第一象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- ②第二象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- ③第三象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- ④第四象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- ⑤终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- ⑥终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- ⑦终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- ⑧与角 α 终边相同的角的集合为 $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$

3. 弧度与弧度制

- ①长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度.
- ②半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l ，则角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$.
- ③弧度制与角度制的换算公式： $2\pi = 360^\circ$ ， $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ， $1 = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.3^\circ$.
- ④若扇形的圆心角为 α (α 为弧度制)，半径为 r ，弧长为 l ，周长为 C ，面积为 S ，则 $l = r|\alpha|$ ，

$$C = 2r + l, S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2.$$



1.5.1.1 题型 1: 任意角与弧度制

提高、目标专属

任意角

【例1】 难度 ★☆☆

下列说法中正确的是

()

- A. 第一象限角一定不是负角
- B. -831° 是第四象限角
- C. 钝角一定是第二象限角
- D. 终边与始边均相同的角一定相等

【例2】 难度 ★☆☆

设 $A = \{\theta \mid \theta \text{ 为锐角}\}$, $B = \{\theta \mid \theta \text{ 为小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $C = \{\theta \mid \theta \text{ 为第一象限的角}\}$, $D = \{\theta \mid \theta \text{ 为小于 } 90^\circ \text{ 的正角}\}$, 则下列等式中成立的是

()

- A. $A = B$
- B. $B = C$
- C. $A = C$
- D. $A = D$

【例3】 难度 ★☆☆

在 $-360^\circ \sim 0^\circ$ 范围内与角 1250° 终边相同的角是

()

- A. -210°
- B. -150°
- C. -190°
- D. -170°

弧度制

【例4】 ☆☆☆

把下列各角的角度化成弧度:

- (1) 135° ;
- (2) 90° ;
- (3) 60° ;
- (4) -420° .

【例5】 ☆☆☆

把下列各角的弧度化成角度:

- (1) $\frac{\pi}{6}$;
- (2) $\frac{5\pi}{12}$;
- (3) $-\frac{\pi}{2}$;
- (4) $-\frac{8\pi}{3}$.

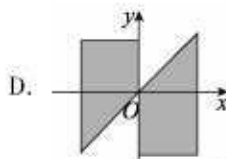
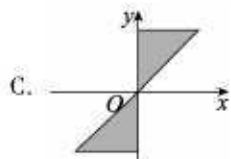
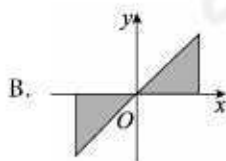
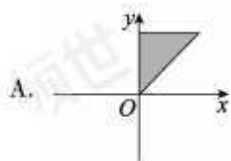
6

☆☆☆

将表的分针拨快 10 分钟, 则分针旋转过程中形成的角的弧度数是_____.

【例 7】 难度 ☆☆☆

集合 $\{\alpha \mid k\pi + \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 中的角所表示的范围(阴影部分)是 ()



【例 8】 难度 ☆☆☆

若扇形圆心角为 216° , 弧长为 30π , 则该扇形的半径为_____, 面积为_____.

【例 9】 难度 ☆☆☆

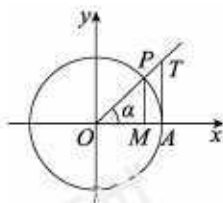
已知扇形 AOB 的圆心角为 α , 周长为 4. 那么当其面积取得最大值时, α 的值是_____.

1.5.2 三角函数的概念



知识梳理

- 三角函数定义: α 是一个任意大小的角, α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y) , 它与原点的距离是 $r(r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$, 则 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}(x \neq 0)$.
- 三角函数线: $\sin\alpha = MP$, $\cos\alpha = OM$, $\tan\alpha = AT$.



- 同角三角函数关系

$$(1) \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 (\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha, \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha);$$

$$(2) \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha (\sin\alpha = \tan\alpha \cos\alpha, \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}).$$



1.5.2.1 题型 1: 三角函数的基本概念

提高、目标专属

【例 1】 难度☆☆☆

若 $\sin\alpha > 0$, 且 $\tan\alpha < 0$, 则角 α 的终边位于

()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

【例 2】 难度☆☆☆

若 $\frac{|\sin x|}{\sin x} = -1$, 则角 x 在第_____象限.

3

☆☆☆

若 $\frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{|\tan x|}{\tan x} = -1$, 则角 x 一定不是 ()

- A. 第四象限角 B. 第三象限角
C. 第二象限角 D. 第一象限角

【例4】 难度 ☆☆☆

已知角 α 的终边经过点 $P(3, 4)$, 则 $5\sin\alpha + 10\cos\alpha$ 的值为 ()

- A. 11 B. 10 C. 12 D. 13

【例5】 难度 ☆☆☆

已知角 θ 的终边过点 $P(-4k, 3k) (k < 0)$, 则 $2\sin\theta + \cos\theta$ 的值是 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$
C. $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$ D. 随着 k 的取值不同其值不同

6 ☆☆☆

α 是第二象限角, $P(x, \sqrt{5})$ 为其终边上一点且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}x$, 则 x 的值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\pm \sqrt{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{2}$

【例 7】 题型 ☆☆☆

已知角 α 的终边经过点 $P(x, -6)$, 且 $\tan \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 x 的值 _____.

【例 8】 题型 ☆☆☆

(2020 年上海高考真题 14) “ $\alpha = \beta$ ” 是 “ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ ” 的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

9

☆☆☆

(2021 年北京高考真题 14) 若点 $A(\cos\theta, \sin\theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$, 则 θ 的一个取值为_____.

【例 10】 难度 ☆☆☆

求证: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x < x < \tan x$.



1.5.2.2 题型2: 同角三角函数关系化简求值 提高、目标专属

【例1】 难度 ★☆☆

(1) 已知 $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, α 在第四象限, 求 $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 的值;

(2) 已知 $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, α 在第二象限, 求 $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ 的值;

(3) 已知 $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$, 求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的值;

(4) 已知 $\cos x = \frac{2}{3}$, 求 $\sin x$, $\tan x$ 的值.

2

☆☆☆

(2018 年华侨、港澳、台联考高考真题 5) 已知 α 为第二象限的角, 且 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 则

$$\sin \alpha + \cos \alpha =$$

()

A. $-\frac{7}{5}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $-\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

【例 3】

难度

☆☆☆

已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$,

(1) 求 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的值

(2) 求 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值

(3) 求 $\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}$ 的值

4

☆☆☆

已知 $\tan \alpha = 2$, 求:

(1) $\frac{4\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin\alpha + 3\cos\alpha}$;

(2) $5\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha$ 的值.

1.5.3 诱导公式



知识梳理

诱导公式

$$(1) \sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha, \cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha, \tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha.$$

$$(3) \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$

$$(4) \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha.$$

$$(5) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

$$(6) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha.$$



1.5.3.1 题型 1: 利用诱导公式化简求值

提高、目标专属

【例 1】 ★☆☆

求下列各三角函数的值:

$$(1) \cos 1470^\circ;$$

$$(2) \sin(-1020^\circ);$$

$$(3) \tan\left(-\frac{11}{3}\pi\right);$$

$$(4) \cot\left(-\frac{31}{4}\pi\right).$$

2 ☆☆☆

已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$, 计算:

(1) $\sin(5\pi - \alpha)$;

(2) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$;

(3) $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2})$;

(4) $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

【例3】 例题 ☆☆☆

已知 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(\pi + \alpha) =$ ()

A. $-\frac{3}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $-\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【例4】 例题 ☆☆☆

设 $\tan(5\pi + \alpha) = m$, 则 $\frac{\sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\pi + \alpha)}$ 的值为 ()

A. $\frac{m-1}{m+1}$

B. -1

C. $\frac{m+1}{m-1}$

D. 1

5

☆☆☆

$k \in \mathbf{Z}$ 时, $\frac{\sin(k\pi - \alpha) \cdot \cos(k\pi + \alpha)}{\sin[(k+1)\pi + \alpha] \cdot \cos[(k+1)\pi + \alpha]}$ 的值为

()

A. -1

B. 1

C. ± 1 D. 与 α 取值有关

【例6】

难度 ☆☆☆

已知 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$

()

A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【例7】

难度 ☆☆☆

已知 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $\cos(\frac{3\pi}{4} - \alpha)$ 的值为

()

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

1.5.4 三角恒等变换



知识梳理

1. 两角和与差的正弦、余弦和正切公式:

$$(1) \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$(2) \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$(3) \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$(4) \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$(5) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow (\tan\alpha - \tan\beta) = \tan(\alpha - \beta)(1 + \tan\alpha\tan\beta);$$

$$(6) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow (\tan\alpha + \tan\beta) = \tan(\alpha + \beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta).$$

2. 二倍角的正弦、余弦和正切公式:

$$\textcircled{1} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow 1 \pm \sin 2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \pm 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2$$

$$\textcircled{2} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \text{升幂公式 } 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \text{降幂公式 } \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

3. 辅助角公式: $A\sin\alpha + B\cos\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\alpha + \varphi)$, 其中 $\tan\varphi = \frac{B}{A}$

4. 半角公式:

$$\textcircled{1} \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\textcircled{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\textcircled{3} \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

5. 万能公式:

$$\textcircled{1} \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\textcircled{2} \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$



1.5.4.1 题型 1: 和差角公式

【例 1】 难度 ★☆☆

利用和(差)角公式, 求下列各式的值:

(1) $\sin 15^\circ$;

(2) $\sin 75^\circ$;

(3) $\cos 75^\circ$;

(4) $\tan 15^\circ$.

【例 2】 难度 ★☆☆

(2019 年华侨、港澳、台联考高考真题 2) $\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ =$ ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 0

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 ☆☆☆

(2015 新课标 I 卷高考理科真题 2) $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

【例 4】 难度 ☆☆☆

 $\cos 24^\circ \cos 36^\circ - \cos 66^\circ \cos 54^\circ$ 的值等于 ()

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

【例 5】 难度 ☆☆☆

(2019 新课标 I 卷高考文科真题 7) $\tan 255^\circ =$ ()

A. $-2 - \sqrt{3}$

B. $-2 + \sqrt{3}$

C. $2 - \sqrt{3}$

D. $2 + \sqrt{3}$

6

☆☆☆

(2010 新课标 I 卷高考文科真题 10) 若 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ ()

A. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

【例 7】 难度 ☆☆☆

(2012 重庆高考理科真题 5) 设 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两个根, 则 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值为 ()

A. -3

B. -1

C. 1

D. 3

【例 8】 难度 ☆☆☆

(2018 新课标 II 卷高考理科真题 15) 已知 $\sin \alpha + \cos \beta = 1$, $\cos \alpha + \sin \beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.



1.5.4.2 题型2: 二倍角公式

【例1】 难度☆☆☆

 $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$ 的值是 _____.

【例2】 难度☆☆☆

 $\cos^2 75^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$ 的值是 ()

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

【例3】 难度☆☆☆

 (2017 新课标Ⅲ卷高考理科真题4) 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{7}{9}$

B. $-\frac{2}{9}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{7}{9}$

4 ☆☆☆

(2021 年高考全国乙卷文科真题 6) $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【例 5】 难度 ☆☆☆

(2020 新课标 I 卷高考理科真题 9) 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

【例 6】 难度 ☆☆☆

(2021 年高考全国甲卷文科真题 11) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【例 7】 难度 ☆☆☆

(2019 年华侨、港澳、台联考高考真题 10) 已知 $\tan A = 2$, 则 $\frac{\sin 2A + \cos^2 A}{1 + \cos 2A} =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. 5



1.5.4.3 题型3: 辅助角公式

【例1】 难度☆☆☆

把 $a\sin\theta + b\cos\theta$ ($a, b \neq 0$) 化成 $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \phi)$ 的形式, 下面给出关于辅助角 ϕ 的说法:

①辅助角 ϕ 一定同时满足 $\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

②满足条件的辅助角 ϕ 一定是方程 $\tan x = \frac{b}{a}$ 的解;

③满足方程 $\tan x = \frac{b}{a}$ 的角一定都是符合条件的辅助角 ϕ ;

④在平面直角坐标系中, 满足条件的辅助角 ϕ 的终边都重合.

其中正确有

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【例2】 难度☆☆☆

(2015 四川高考真题 12) $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$ 的值是_____.

【例3】 难度☆☆☆

(2021 年高考全国乙卷文科真题 4 改编) 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$ 的最大值是_____.

4 ☆☆☆

(2017 年山东高考文科真题 7 改编) 函数 $y = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$ 的最小值为 _____

【例 5】 难度 ☆☆☆

(2020 新课标 III 卷高考文科真题 5) 已知 $\sin \theta + \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$, 则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) =$

()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【例 6】 难度 ☆☆☆

函数 $f(x) = \sin 2x - \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的最小值为

()

A. 0

B. -1

C. $-\sqrt{2}$

D. -2

1.5.5 三角函数的图象与性质



知识梳理

1. 正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质:

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbf{R}$
最值	当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; 当 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$.	当 $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; 当 $x = 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$.	既无最大值也无最小值
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上是增函数; 在 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上是减函数.	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上是增函数; 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上是减函数.	在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上是增函数.
对称性	对称中心 $(k\pi, 0)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 对称轴 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$	对称中心 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 对称轴 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$	对称中心 $(\frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$ 无对称轴

2. 三角函数 $y = \sin x$ 到三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换:

方法一:

① $y = \sin x$ 图象上所有点向左(右)平移 $|\varphi|$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象;② 再将函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象上所有点的横坐标伸长(缩短)到原来的 $\frac{1}{\omega}$ (纵坐标不变),得到函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象;③ 再将函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长(缩短)到原来的 A 倍(横坐标不变), 得到函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.

方法二:

① $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长(缩短)到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(纵坐标不变), 得到函数 $y = \sin \omega x$ 的图象;② 再将函数 $y = \sin \omega x$ 的图象上所有点向左(右)平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象;③ 再将函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长(缩短)到原来的 A 倍(横坐标不变), 得到函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.3. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的性质:① 振幅: A ;② 周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$;③ 频率: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$;④ 相位: $\omega x + \varphi$;⑤ 初相: φ .对于函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$:若当 $x = x_1$ 时, 取得最小值为 $y_{\min}$; 当 $x = x_2$ 时, 取得最大值为 $y_{\max}$,则 $A = \frac{1}{2}(y_{\max} - y_{\min})$, $B = \frac{1}{2}(y_{\max} + y_{\min})$.



1.5.5.1 题型 1(a): 正(余)弦型函数的图象和性质(上)

目标、菁英专属



1.5.5.1 题型 1(b): 正(余)弦型函数的图象和性质(下)

目标、菁英专属

【例 1】 难度☆☆☆

函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的

- (1) 定义域为 _____
- (2) 值域为 _____
- (3) 周期为 _____
- (4) 对称轴为 _____
- (5) 对称中心为 _____
- (6) 单调增区间为 _____

【例 2】 难度☆☆☆

(2014 年陕西高考理科真题 2) 函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

3

☆☆☆

函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象的一条对称轴方程为 ()

A. $x = -\frac{\pi}{8}$

B. $x = -\frac{\pi}{4}$

C. $x = -\frac{\pi}{2}$

D. $x = -\pi$

【例4】 难度 ☆☆☆

若函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3} + \varphi)$ 是偶函数, 则 φ 的值可以是 ()

A. $\frac{5\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $-\frac{\pi}{2}$

【例5】 难度 ☆☆☆

(2018 新课标Ⅲ卷高考理科真题 15) 函数 $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{6})$ 在 $[0, \pi]$ 的零点个数为 _____

6 ☆☆☆

(2021 年全国新高考 I 卷真题 4) 下列区间中, 函数 $f(x) = 7\sin(x - \frac{\pi}{6})$ 单调递增的区间是

- ()
- A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

【例 7】 难度 ☆☆☆

函数 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{6} - 2x)$ 的单调递增区间是 ()

- A. $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$ B. $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbf{Z})$
- C. $[k\pi - \frac{2\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$ D. $[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}] (k \in \mathbf{Z})$

【例 8】 难度 ☆☆☆

函数 $y = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$ 的单调递增区间为 _____.

9

☆☆☆

画出函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 在一个周期内的图像.

有L

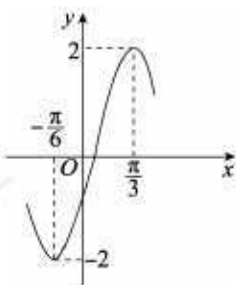
自n世

【例10】

☆☆☆

(2016 新课标 II 卷高考文科真题 3) 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则

()



A. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$

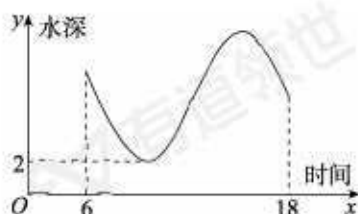
B. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

C. $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$

D. $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$

11 ☆☆☆

如图,某港口一天中6时到18时的水深变化曲线近似满足函数 $y = 3\sin(\omega x + \varphi) + k$, 据此可知,这段时间水深(单位:m)的最大值为 ()



A. 5

B. 6

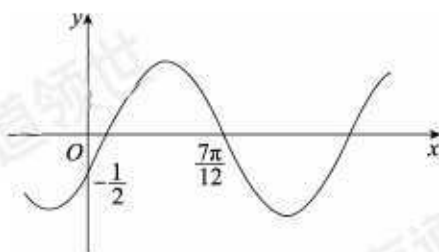
C. 8

D. 10

【例12】☆☆☆

(多选题) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| \leq \frac{3\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则

()

A. $\omega = 2$ B. $\omega = \frac{26}{7}$ C. $\varphi = \frac{7\pi}{6}$ D. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$



1.5.5.2 题型 2: 三角函数的图像变换

【例 1】 难度 ★☆☆

将函数 $y = \sin x$ 的图象经过适当变换得到

(1) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$, 则这种变换可以是_____

(2) $y = \sin 2x$, 则这种变换可以是_____

(3) $y = 2\sin x$, 则这种变换可以是_____

(4) $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 则这种变换可以是_____

【例 2】 难度 ★☆☆

把函数 $y = \cos x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 然后把图象上的所有点的横坐标缩小到原来的 $\frac{1}{2}$

(纵坐标不变), 则所得图形对应的函数解析式为 ()

A. $y = \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$

B. $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$

C. $y = \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8})$

D. $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

【例 3】 难度 ★☆☆

我们知道, 函数 $y = \sin 2x$ 的图象经过适当变换可以得到 $y = \cos 2x$ 的图象, 则这种变换可以是

()

A. 沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

B. 沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

C. 沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位

D. 沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位

4

☆☆☆

(2017 新课标 I 卷高考理科真题 9) 已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则下面结论正确的是 ()

- A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 C_2
- B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 C_2
- C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 C_2
- D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 C_2

【例 5】☆☆☆

(2021 年高考全国乙卷理科真题 7) 把函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像, 则 $f(x) =$ ()

- A. $\sin(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12})$ B. $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$ C. $\sin(2x - \frac{7\pi}{12})$ D. $\sin(2x + \frac{\pi}{12})$

【例 6】☆☆☆

(2016 年北京高考理科真题 7) 将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 图像上的点 $P(\frac{\pi}{4}, t)$ 向左平移 $s(s > 0)$ 个单位长度得到点 P' . 若 P' 位于函数 $y = \sin(2x)$ 的图像上, 则 ()

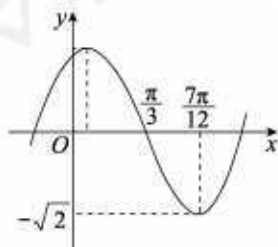
- A. $t = \frac{1}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$ B. $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$
- C. $t = \frac{1}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ D. $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$



1.5.5.3 题型 3: 三角函数图像求值

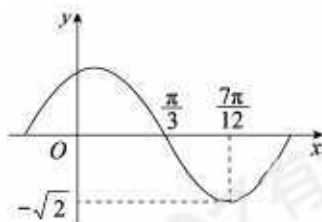
【例 1】 难度 ★★★

(2011 年江苏高考文科真题 9) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$) 的部分图象如图所示, 则 $f(0) =$ _____.



【例 2】 难度 ★★★

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $f(\frac{11\pi}{24})$ 的值为 ()



A. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

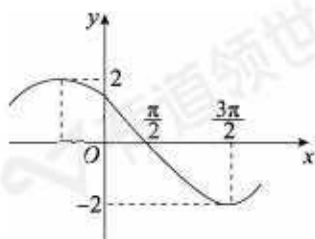
B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. -1

3 ☆☆☆

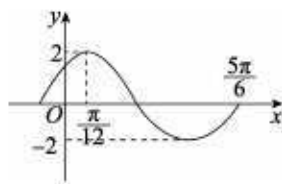
已知 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$), 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(2016\pi)$ 的值为 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

【例4】 例题 ☆☆☆

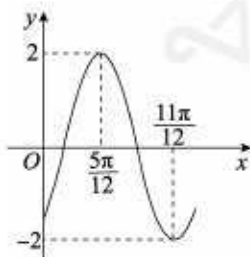
已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在一个周期内的图象如图所示, 则 $f(\frac{\pi}{4}) =$ ()



- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. $-\frac{1}{2}$

【例5】 例题 ☆☆☆

函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $f(0) =$ ()



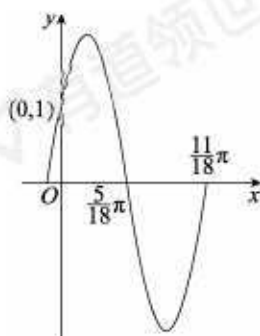
- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. -1 D. $-\frac{1}{2}$

6

☆☆☆

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $f(\frac{2\pi}{9}) =$

()

A. $\sqrt{3}$

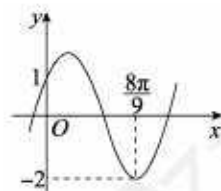
B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

【例7】 难度☆☆☆

函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示, 则 $f(\frac{2\pi}{3}) =$ ()

A. $\sqrt{3}$

B. 1

C. -1

D. $-\sqrt{3}$

1.5.5.4 题型4(a): 与 ω 有关的性质问题(上) 菁英专属1.5.5.4 题型4(b): 与 ω 有关的性质问题(下) 菁英专属

【例1】 难度 ★★★

(2011 年全国高考文科真题7、理科真题5) 设函数 $f(x) = \cos \omega x (\omega > 0)$, 将 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图像与原图像重合, 则 ω 的最小值等于 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. 6 D. 9

【例2】 难度 ★★★

(2018 北京高考理科真题11) 设函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$, 若 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$ 对任意的实数 x 都成立, 则 ω 的最小值为_____.

【例3】 难度 ★★★

(2012 新课标高考理科真题9) 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减. 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$
C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, 2]$

4 ☆☆☆

(2015 年天津高考文科真题 14) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega, \omega)$ 内单调递增, 且函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \omega$ 对称, 则 ω 的值为_____.

【例 5】 难度 ☆☆☆

已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上是增函数, 其在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值 2, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ C. $[\frac{3}{4}, \frac{5}{2})$ D. $[\frac{5}{2}, 3)$

【例 6】 难度 ☆☆☆

已知 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$), $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{\pi}{3})$, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 上有最小值, 无最大值, 则 $\omega =$ _____.

7 ☆☆☆

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$), 若 $f(\frac{\pi}{4}) = 2$, $f(\pi) = 0$, 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 上具有单调性, 那么 ω 的取值共有 ()

A. 6 个

B. 7 个

C. 8 个

D. 9 个

【例 8】 题型 ☆☆☆

(2016 年天津高考文科真题 8 改编) 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{8}]$ B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$ C. $(0, \frac{5}{8}]$ D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

【例 9】 题型 ☆☆☆

设 ω 为正实数, 若存在 a, b ($\pi \leq a < b \leq 2\pi$), 使得 $\sin\omega a + \sin\omega b = 2$, 则 ω 的取值范围_____.

1.5.6 三角函数创新题



1.5.6.1 题型 1: 【数学思维】三角函数的创新与新定义题

【例 1】 难度 ★★☆☆

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 定义运算 $a \otimes b = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b < a \end{cases}$, 则函数 $f(x) = \sin x \otimes \cos x$ 的最大值是_____.

【例 2】 难度 ★★☆☆

定义 2×2 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 - a_2 a_3$, 若函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \cos^2 x - \sin^3 x & \sqrt{3} \\ \cos(\frac{\pi}{2} + 2x) & 1 \end{vmatrix}$, 则下列表述正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 中心对称
- B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
- C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ 上单调递增
- D. $f(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数

3 ☆☆☆

已知非常数函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 如果存在正数 T , 使得 $\forall x \in R$, 都有 $f(x+T) = Tf(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 T .

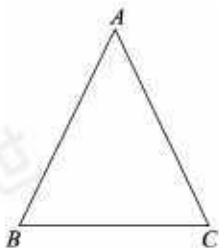
(1) 判断下列函数是否具有性质 T ? 并说明理由;

① $f_1(x) = 2x - 1$; ② $f_2(x) = \cos(2\pi x + 1)$.

(2) 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 具有性质 T , 求 ω 的最小值;

【例4】 难度 ☆☆☆

知道在直角三角形中, 一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定, 因此边长与角的大小之间可以相互转化. 与之类似, 可以在等腰三角形中建立边角之间的联系, 我们定义: 等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角的正对(sad). 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 顶角 A 的正对记作 $\text{sad}A$, 这时 $\text{sad}A = \frac{\text{底边}}{\text{腰}} = \frac{BC}{AB}$. 容易知道一个角的大小与这个角的正对值也是相互唯一确定的.



根据上述对角的正对定义, 解下列问题:

(1) $\text{sad}60^\circ$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 2

(2) 对于 $0^\circ < \angle A < 180^\circ$, $\angle A$ 的正对值 $\text{sad}A$ 的取值范围是_____.

(3) 已知 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, 其中 α 为锐角, 试求 $\text{sad}\alpha$ 的值.

1.5.7 三角函数多选题



1.5.7.1 题型1:【数学思维】三角函数多选题与应试思维综合运用

【例1】 难度 ★★★

(多选)把曲线 $y = \sin 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $f(x)$ 的图象,则下列说法正确的是

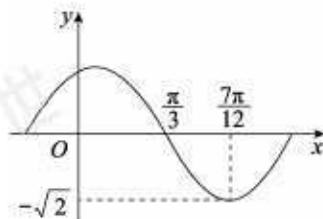
()

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π B. 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
- C. 函数 $f(x)$ 图象关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递增

【例2】 难度 ★★★

(多选)函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, (A, ω, φ 是常数, $A > 0$) 的部分图象如图所示,则

()



- A. $f(x) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{6} - 2x)$
- B. $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$
- C. $f(x)$ 的对称轴为 $x = k\pi + \frac{\pi}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$
- D. $f(x)$ 的递减区间为 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$

3 ☆☆☆

(多选) 已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) - \cos(\sin x)$, 则 ()

- A. $f(x)$ 是奇函数
 B. $f(x)$ 图象有对称轴
 C. $f(x)$ 是周期函数
 D. $f(1) < 0$

【例4】 难度 ☆☆☆

(多选) 函数 $f(x) = \sin^2(x + \frac{\pi}{12}) + \sin^2(x + \frac{\pi}{4})$, 则下列关于 $f(x)$ 的说法中正确的是 ()

- A. 最小正周期是 π
 B. 最大值是 2
 C. 是区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 上的减函数
 D. 图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$ 中心对称

【例5】 难度 ☆☆☆

(多选) 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增
 B. $f(x)_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$
 C. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 D. 对 $n \in \mathbf{N}_+$, $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^{n-1} x \leq \frac{3^n}{4^n}$