

高一

数学

高一数学 学业规划与方法指导（上）

有道高中教研组 编著

预约陪陪 +wangyushu2013

目录

001	第一讲 集合的概念和表示
009	第二讲 集合的关系与运算
017	第三讲 解不等式
025	第四讲 简易逻辑
037	第五讲 函数的三要素
049	第六讲 函数的单调性
061	第七讲 函数的奇偶性
071	第八讲 考试实战训练
081	第九讲 集合延拓
091	第十讲 逻辑延拓
099	第十一讲 不等式延拓
109	第十二、十三讲 均值不等式
121	第十四讲 函数的三要素延拓
131	第十五讲 函数的单调性延拓
139	第十六讲 函数的奇偶性延拓
149	第十七讲 指数函数和幂函数
159	第十八讲 抽象函数

- 167 第十九讲 对数函数
- 175 第二十讲 函数零点
- 181 第二十一讲 三角函数计算
- 189 第二十二、二十三讲 三角恒等变换
- 197 第二十四讲 正弦型函数的图像与性质

第一讲

集合的概念和表示

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	1.1.1.1 子集个数问题	2 星



有1

【基础巩固】

集合的概念与表示方法

【例1】

下列所给的对象能构成集合的是_____.

- (1) 英文 26 个字母;
- (2) 中国古代四大发明;
- (3) 有道本届新高一长得比较帅的物理主讲老师;
- (4) 有道本届新高一身高不低于 180cm 的化学主讲老师;
- (5) 方程 $x^2 = -2$ 的实数根.

【例2】

下列元素与集合的关系中, 正确的是

- ()
- A. $-1 \in \mathbf{N}$ B. $0 \notin \mathbf{N}^*$ C. $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$ D. $\frac{2}{5} \notin \mathbf{R}$

【例3】

(多选) 设集合 $A = \{-3, x+2, x^2-4x\}$, 且 $5 \in A$, 则 x 的值可以为 ()

- A. 3 B. -1 C. 5 D. -3

【例4】

(多选)集合 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 用描述法可表示为 ()

A. $\{x \mid x \text{ 是不大于 } 9 \text{ 的非负奇数}\}$

B. $\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{N}, \text{ 且 } k \leq 4\}$

C. $\{x \mid x \leq 9, x \in \mathbf{N}^*\}$

D. $\{x \mid 0 \leq x \leq 9, x \in \mathbf{Z}\}$

【例5】

(多选)已知 x, y, z 为非零实数,代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|}$ 的值组成的集合是 M ,则下列判断正确的是 ()

A. $0 \in M$

B. $2 \in M$

C. $-4 \in M$

D. $4 \in M$

【核心精讲】

子集个数问题

【例6】

已知集合 $A = \{0, 1\}$, 则 A 的子集的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【例7】

已知集合 M 满足 $\{2, 3\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么这样的集合 M 的个数为

()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【例8】

设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A \subseteq M$, A 不是空集, 且满足: 若 $a \in A$, 则 $6 - a \in A$, 则满足条件的集合 A 共有 _____ 个.

【例9】

已知非空集合 A , 若对于任意 $x \in A$, 都有 $\frac{4}{x} \in A$, 则称集合 A 具有“反射性”. 则在集合 $\{1, 2, 4, 8\}$ 的所有子集中, 具有“反射性”的集合个数为 _____.

【随堂练习】

1. (多选)下列所给的对象能构成集合的是 ()
- A. 一中高一(1)班数学成绩优秀的学生
B. 平面直角坐标系内横坐标与纵坐标相等的点
C. $\sqrt{5}$ 的近似值
D. 倒数等于本身的实数
2. 下列元素与集合的关系中, 正确的是 ()
- A. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{R}$ B. $\pi \in \mathbb{Q}$ C. $0 \notin \mathbb{N}^*$ D. $-1 \in \mathbb{N}$
3. (多选)若 $3 \in \{m-1, 3m, m^2-1\}$, 则实数 m 的可能取值为 ()
- A. 4 B. 2 C. 1 D. -2
4. (2020 年华侨、港澳、台联考高考第 1 题)若集合 A 共有 5 个元素, 则 A 的真子集的个数为 ()
- A. 32 B. 31 C. 16 D. 15
5. 符合条件 $\{1\} \subseteq A \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 A 的个数是 ()
- A. 15 B. 16 C. 31 D. 32

【展望秋季】

1. 设 A 是数集, 满足 $a \in A$ 时, 必有 $\frac{1}{1-a} \in A$,

(1) 若 $2 \in A$, 问:

① A 中至少有几个元素? 并把它列举出来?

② A 中还可以有其它元素吗?

(2) 若 A 中只能有一个元素且 $2 \notin A$, 实数 a 是否存在?

2. (多选) 非空集合 A 具有如下性质: ① 若 $x, y \in A$, 则 $\frac{x}{y} \in A$; ② 若 $x, y \in A$, 则 $x+y \in A$.

下列判断中, 正确的有

()

A. $-1 \notin A$

B. $\frac{2022}{2023} \in A$

C. 若 $x, y \in A$, 则 $xy \in A$

D. 若 $x, y \in A$, 则 $x-y \in A$

【课后巩固】

1. (2024-2025 秋四川校级期中) 给出下列 6 个关系: ① $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{R}$, ② $\sqrt{3} \in \mathbf{Z}$, ③ $0 \notin \mathbf{N}^*$,

④ $\sqrt{4} \in \mathbf{N}$, ⑤ $\pi \notin \mathbf{Q}$, ⑥ $|-2| \notin \mathbf{Z}$. 其中正确命题的个数为 ()

A. 4 B. 2 C. 3 D. 5

2. (2007 年全国统一高考数学试卷第 5 题) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则

$b-a =$ ()

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

3. (2013 年江西省高考数学试卷第 5 题) 若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + ax + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 $a =$ ()

A. 4 B. 2 C. 0 D. 0 或 4

第二讲

集合的关系与运算

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	1.1.1.2 多子集个数问题	2 星
拔高拓展	1.1.2.1 韦恩图解决抽象集合问题	2 星



有1

【基础巩固】

集合的运算

【例1】

(2023·乙卷高考真题第2题) 设全集 $U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, 集合 $M = \{0, 4, 6\}$, $N = \{0, 1, 6\}$, 则 $M \cup \complement_U N =$ ()

- A. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ B. $\{0, 1, 4, 6, 8\}$
C. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ D. U

【例2】

(2024·北京高考真题第1题) 已知集合 $M = \{x \mid -3 < x < 1\}$, $N = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()

- A. $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$ B. $\{x \mid x > -3\}$
C. $\{x \mid -3 < x < 4\}$ D. $\{x \mid x < 4\}$

【例3】

(2023·甲卷高考真题第1题) 设集合 $A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, U 为整数集, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()

- A. $\{x \mid x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x \mid x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$ D. $\emptyset$

【核心精讲】

多子集个数问题

【例4】

(2022年北京市清北学堂高校强基第16题) 集合 A, B 的并集 $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 与 (B, A) 视为不同的集合对, 则这样的集合对 (A, B) 的个数是_____.

【例5】

设集合 A, B 是非空集合 M 的两个不同子集.

- (1) 若 $M = \{a_1, a_2\}$, 且 A 是 B 的子集, 求所有有序集合对 (A, B) 的个数;
- (2) 若 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 且 A 是 B 的子集, 求所有有序集合对 (A, B) 的个数.

【拓展拔高】

韦恩图解决多子集问题

【例6】

集合 A 、 B 、 C (不必相异) 满足 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}$, 求满足条件的有序三元组 (A, B, C) 的个数.

【例7】

(2020 年北京市清华大学强基计划第 3 题) A, B, C 均为 $\{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ 子集, 且 $A \subseteq C$, $B \subseteq C$, 问有序的 (A, B, C) 共有多少?

【例8】

若 $A \cap B = \{a, b\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, 则符合条件的不同有序集合对 (A, B) 共有 ____ 对.

【例9】

A, B 是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的非空子集, 则满足 $A \cap B = \emptyset$ 的有序集合对 (A, B) 共有 ____ 个.

【随堂练习】

- (2024·天津高考真题第1题)集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$
 C. $\{2, 4\}$ D. $\{1\}$
- (2023·北京高考真题第1题)已知集合 $M = \{x \mid x+2 \geq 0\}$, $N = \{x \mid x-1 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 A. $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x \mid -2 < x \leq 1\}$
 C. $\{x \mid x \geq -2\}$ D. $\{x \mid x < 1\}$
- (2021·乙卷高考真题第2题)已知集合 $S = \{s \mid s = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $T = \{t \mid t = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 $S \cap T =$ ()
 A. $\emptyset$ B. S C. T D. $\mathbf{Z}$
- 若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则记 $[A_1, A_2]$ 是一组“双子集拆分”, 规定 $[A_1, A_2]$ 和 $[A_2, A_1]$ 是 A 的同一组“双子集拆分”, 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 那么 A 的不同“双子集拆分”共有 _____ 组.
- 已知 $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, 10\}$, 则满足条件的集合的有序三元组 (A, B, C) 的个数为 _____ 个.

有1

解不等式



有1

【基础巩固】

一元二次不等式

【例1】

不等式 $x(1-2x) > 0$ 的解集是

()

A. $(-\infty, \frac{1}{2})$

B. $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

D. $(0, \frac{1}{2})$

【例2】

(2024·上海高考真题第4题) 已知 $x \in \mathbb{R}$, 则不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为_____.

【例3】

不等式 $(x-1)^2 < x+5$ 的解集为

()

A. $\{x \mid 1 < x < 4\}$

B. $\{x \mid -1 < x < 4\}$

C. $\{x \mid -4 < x < 1\}$

D. $\{x \mid -1 < x < 3\}$

【例4】

若 $a < 0$, 则关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$ 的解集是

()

A. $\{x \mid x > 5a \text{ 或 } x < -a\}$

B. $\{x \mid x > -a \text{ 或 } x < 5a\}$

C. $\{x \mid 5a < x < -a\}$

D. $\{x \mid -a < x < 5a\}$

【核心精讲】

二次函数恒成立问题

【例5】

若不等式 $x^2 + mx + 4 \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则 m 的取值范围的集合是_____.

【例6】

若不等式 $ax^2 + 2ax - 1 < 0$ 对于一切实数 x 都恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1]$ B. $(-1, 0)$ C. $(-1, 0]$ D. $[0, +\infty)$

【例7】

(多选) 当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 恒成立, 则 m 的范围可以是 ()

A. $-13 < m < -9$ B. $-9 < m < -5$ C. $-5 < m < -1$ D. $-1 < m < 3$

【例8】

(2014 · 江苏高考真题第10题) 已知函数 $f(x) = x^2 + mx - 1$, 若对于任意 $x \in [m, m+1]$ 都有 $f(x) < 0$, 则实数 m 的取值范围为_____.

【拔高拓展】

高次不等式

【例9】

若高次不等式 $(-x^3 + x^2 + 2x)(x^2 - 1) \geq 0$, 则 x 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 0]$
C. $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$ D. $[1, 2]$

【例10】

不等式 $(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 3x + 2) < 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$
B. $(-1, 1) \cup (2, 3)$
C. $(-1, 1) \cup (1, 2)$
D. $(1, 2) \cup (2, 3)$

【随堂练习】

1. (2019·天津高考真题第10题) 设 $x \in \mathbf{R}$, 使不等式 $3x^2 + x - 2 < 0$ 成立的 x 的取值范围为_____.

2. (2011·广东高考真题第5题) 不等式 $2x^2 - x - 1 > 0$ 的解集是 ()

A. $(-\frac{1}{2}, 1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

3. (2012·福建高考真题第11题) 已知关于 x 的不等式 $x^2 - ax + 2a > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

4. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 2ax + 1 > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{a \mid 0 \leq a < 1\}$ B. $\{a \mid 0 < a < 1\}$
C. $\{a \mid a < 0, \text{ 或 } a > 1\}$ D. $\{a \mid -1 < a \leq 0\}$

5. 若不等式 $x^2 + ax + 4 \leq 0$ 对任意实数 $x \in [-3, -1]$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 ()

- A. 0 B. 4 C. $\frac{13}{3}$ D. 5

6. 当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -5)$ B. $(-\infty, -5]$
C. $(-5, +\infty)$ D. $[-5, +\infty)$

第四讲

简易逻辑

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	1.1.4.1 充分条件与必要条件	2 星
拔高拓展	1.1.4.2 【数学思维】数学逻辑思维	4 星



有1

【基础巩固】

特称命题、全称命题及其否定

1. 下列语句

①有道语文主讲老师可爱吗?

②学数学真开心啊!

③2 不是素数;

④0 是自然数;

其中是命题的语句的序号有_____.

【例1】

下列命题中

(1)有些自然数是偶数;

(2)正方形是菱形;

(3)能被6整除的数也能被3整除;

(4)对于任意 $x \in R$, 总有 $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$.

存在量词命题的个数是

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【例2】

(2015·新课标 I) 设命题 $p: \exists n \in N, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为

A. $\forall n \in N, n^2 > 2^n$

B. $\exists n \in N, n^2 \leq 2^n$

C. $\forall n \in N, n^2 \leq 2^n$

D. $\exists n \in N, n^2 = 2^n$

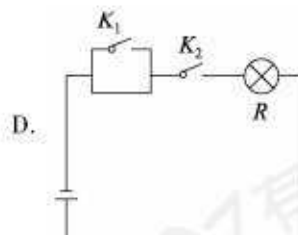
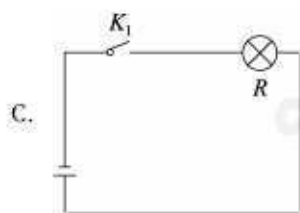
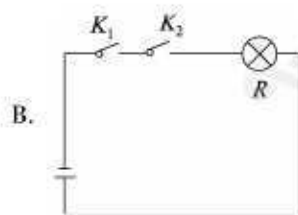
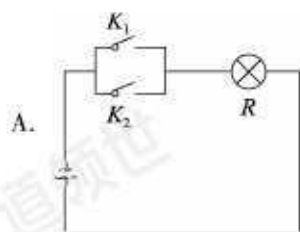
【核心精讲】

充分条件与必要条件

【例3】

满足“闭合开关 K_1 ”是“灯泡 R 亮”的充要条件的电路图是

()



【例4】

(2014·浙江高考真题第2题) 设四边形 $ABCD$ 的两条对角线为 AC , BD , 则“四边形 $ABCD$ 为菱形”是“ $AC \perp BD$ ”的

()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【例5】

(2013·上海春季高考真题第23题)已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, “ $b^2 - 4ac < 0$ ”是“函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象恒在 x 轴上方”的 ()

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充要条件
- D. 既非充分又非必要条件

【例6】

“ $0 < x < 2$ ”是“ $-1 < x < 3$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【例7】

$x > 3$ ”是“ $x^2 > 9$ ”成立的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【例8】

(多选)使不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个充分不必要条件是 ()

A. $x \geq 0$

B. $x < 0$ 或 $x > 2$

C. $x \in \{-1, 3, 5\}$

D. $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 3$

【例9】

若 $p: a > 3$, q : 关于 x 的方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 p 是 q 成立的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【拔高拓展】

逻辑推理

【例10】

已知 p 是 r 的充分条件，而 r 是 q 的必要条件，同时也是 s 的充分条件， q 是 s 的必要条件.

(1) r 是 p 的什么条件?

(2) p 是 q 的什么条件?

(3) 在 p, q, r, s 中，哪几对互为充要条件?

【例11】

(2013·上海高考真题第16题) 钱大姐常说“便宜没好货”，她这句话的意思是：“不便宜”是“好货”的 ()

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

【例12】

伟人毛泽东的《清平乐·六盘山》传颂至今，“天高云淡，望断南飞雁。不到长城非好汉，屈指行程二万，六盘山上高峰，红旗漫卷西风，今日长缨在手，何时缚住苍龙？”现在许多人前往长城游玩时，经常会用“不到长城非好汉”来勉励自己，由此推断，“到长城”是“为好汉”的 ()

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【例 13】

甲、乙、丙、丁四人在餐馆聚会，其中有一人买单，当甲的妻子询问是谁买单时，他们的回答如下：甲：不是我买的单；乙：是丁买的单；丙：是乙买的单；丁：不是我买的单。这四个人中只有一个人说了真话，由此可见，您能判定买单的人是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【例 14】

一个人的夜明珠丢了，四处寻找。一天，他来到山上，看到三个小屋，分别为 1 号、2 号、3 号。从三个小屋分别走出来一个女子，1 号屋的女子说：“夜明珠不在此屋。” 2 号屋的女子说：“夜明珠在 1 号屋。” 3 号屋的女子说：“夜明珠不在此屋。” 三个女子，只有一人说了真话，谁说了真话？夜明珠在哪个屋内？下列判断正确的是 ()

- ① 1 号屋的女子说的是真话
② 2 号屋的女子说的是真话
③ 3 号屋的女子说的是真话
④ 夜明珠在 1 号屋内
⑤ 夜明珠在 2 号屋内
⑥ 夜明珠在 3 号屋内

- A. ①⑤ B. ①⑥ C. ②④ D. ③⑥

【例 15】

你在有道的物理、化学、数学、英语四位主讲老师里，其中有一位做了一件好事，但不知道是哪一位，你对四人进行询问，四人的回答如下：物理主讲：我没做；化学主讲：是物理主讲做的；数学主讲：不是我做的；英语主讲：是化学主讲做的。如果其中只有一个人说了真话，那么做好事的主讲是 ()

- A. 物理 B. 化学 C. 数学 D. 英语

【随堂练习】

1. (2014·湖南) 设命题 $p: \forall x \in R, x^2 + 1 > 0$, 则 $\neg p$ 为 ()

A. $\exists x_0 \in R, x_0^2 + 1 > 0$

B. $\exists x_0 \in R, x_0^2 + 1 \leq 0$

C. $\exists x_0 \in R, x_0^2 + 1 < 0$

D. $\forall x_0 \in R, x_0^2 + 1 \leq 0$

2. (2016·浙江) 命题 “ $\forall x \in R, \exists n \in N^*,$ 使得 $n \geq x^2$ ” 的否定形式是 ()

A. $\forall x \in R, \exists n \in N^*,$ 使得 $n < x^2$

B. $\forall x \in R, \forall n \in N^*,$ 使得 $n < x^2$

C. $\exists x \in R, \exists n \in N^*,$ 使得 $n < x^2$

D. $\exists x \in R, \forall n \in N^*,$ 使得 $n < x^2$

3. (多选) “ $x > 3$ ” 的充分不必要条件可以是 ()

A. $x > 0$

B. $x \geq 2$

C. $x \geq 4$

D. $x > 5$

4. (2020·天津高考真题第2题) 设 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 1$ ” 是 “ $a^2 > a$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

5. (2019·天津高考真题第3题) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $x^2 - 5x < 0$ ” 是 “ $|x - 1| < 1$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

6. (多选) 已知 p, q 都是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 则 ()

- A. p 是 q 的既不充分也不必要条件
- B. p 是 s 的充分条件
- C. r 是 q 的必要不充分条件
- D. s 是 q 的充要条件

【课后巩固】

1. (2015·重庆高考真题第2题) “ $x=1$ ”是“ $x^2-2x+1=0$ ”的 ()
 A. 充要条件
 B. 充分而不必要条件
 C. 必要而不充分条件
 D. 既不充分也不必要条件

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $|x-1| < 1$ ” 是 “ $x^2 < 2x$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 p, q, r 是三个命题, 若 p 是 r 的充要条件且 q 是 r 的必要条件, 那么 q 是 p 的 ()
 A. 充分条件
 B. 必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

有1

第五讲

函数的三要素

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	1.3.1.1 函数的定义域	2 星
核心精讲	1.3.2.3 一次分式函数的最值与值域	3 星
	1.3.2.4 二次分式最值速算技巧	2 星



有1

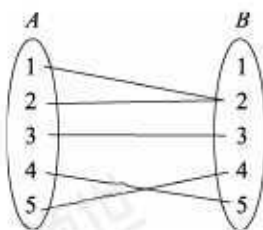
【基础巩固】

函数的基本概念和定义域

【例1】

集合 A, B 与对应关系 f 如图所示：

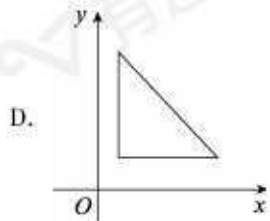
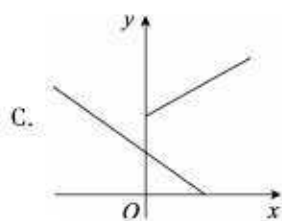
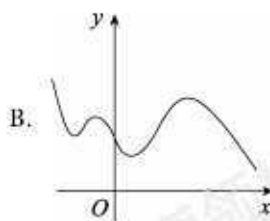
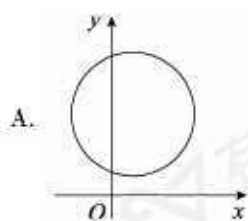
$f: A \rightarrow B$ 是否为从集合 A 到集合 B 的函数？如果是，那么定义域、值域与对应关系各是什么？



【例2】

下列图形可以作为某个函数图象的是

()



【例3】

下列函数为同一函数的是

()

A. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 与 $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

B. $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x(x+1)}$

C. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1$

D. $f(x) = 1$ 与 $g(x) = x^0 (x \neq 0)$

【例4】

(2022·北京高考真题第11题)函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.

【例5】

求函数 $y = \frac{(x-2)^0}{\sqrt{3-x}} + \sqrt{x-2}$ 的定义域_____.

【核心精讲】

函数的值域

【例6】

函数 $g(x) = x^2 - 2x - 2$, $x \in [0, 4]$ 的值域为 ()

- A. $[-2, 6]$ B. $[-3, -2]$
C. $[-3, 6]$ D. $[-2, 4]$

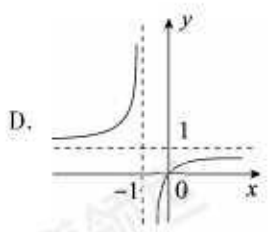
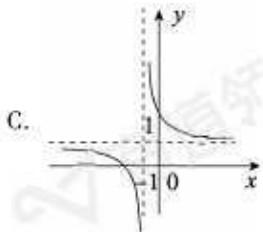
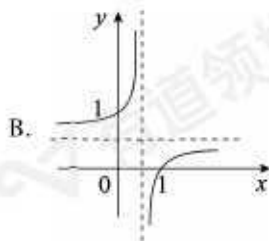
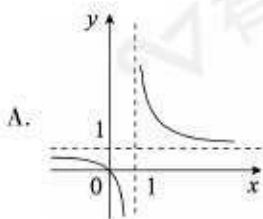
【例7】

(多选) 若函数 $y = x^2 - 4x - 4$ 的定义域为 $[0, m]$, 值域为 $[-8, -4]$, 则实数 m 的值可能为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【例8】

函数 $y = \frac{x-2}{x-1}$ 的图象是 ()



【例9】

函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $x \in [2, 6]$ 的值域是 ()

A. $[\frac{1}{3}, 2]$

B. $[\frac{2}{5}, 2]$

C. $[\frac{2}{5}, +\infty)$

D. $(-\infty, 2]$

【例10】

函数 $y = \frac{1-x}{2+x}$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的值域为 _____.

【拓展拔高】

整体代换思想

【例11】

已知函数 $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1}$, 则对任意实数 x , 函数 $f(x)$ 的值域是 ()

A. $(0, 2)$

B. $(0, 2]$

C. $[0, 2)$

D. $[0, 2]$

【例 12】

函数 $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$ 的值域是_____.

【例 13】

函数 $f(x) = x + \sqrt{3 - x}$ 的值域是_____.

【例 14】

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 的值域是_____.

【随堂练习】

1. 已知函数 $f(x) = \sqrt{4-3x} + x^0$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 ()

A. $(-\infty, \frac{4}{3}]$

B. $(-\infty, 0]$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{4}{3}]$

D. $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$

2. 函数 $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [-2, 2]$ 的值域是 ()

A. $[-1, 0]$

B. $[0, 8]$

C. $[1, 8]$

D. $[-1, 8]$

3. 函数 $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$ 的值域 ()

A. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

B. $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

C. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$

D. $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

4. 函数 $y = \frac{2x+1}{x-3}$ 的值域是

()

A. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

B. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

C. $\mathbb{R}$

D. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

5. 函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ 在区间 $[0, 4]$ 上的值域为_____.

6. 函数 $f(x) = \frac{2x+3}{1+x} (x > 0)$ 的值域是_____.

7. 函数 $y = \frac{1+x^2}{3-x^2}$ 值域是_____.

【展望秋季】

1. 定义 $\min\{a, b, c\}$ 为 a, b, c 中的最小值, 设 $f(x) = \min\{2x+4, x^2+1, 5-3x\}$, 则 $f(x)$ 的最大值是_____.
2. 已知 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分, 即 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 如 $[-2.1] = -3$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. 函数 $y = [x]$ 称为高斯函数, 也叫取整函数.
 - (1) 当 $-2 \leq x < -1$ 时, 函数 $y = [x]$ 的值是_____.
 - (2) 当 $-2 \leq x < 2$ 时, 用分段函数表示 $y = [x] =$ _____.
 - (3) 画出函数 $y = [x] (x \in \mathbf{R})$ 的图象.
 - (4) 画出函数 $y = x - [x] (x \in \mathbf{R})$ 的图象.

【课后巩固】

1. 函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{x}$ 的定义域是 ()

- A. $[-1, 0)$ B. $(0, 1]$
C. $(-1, 0) \cup (0, 1]$ D. $[-1, 0) \cup (0, 1]$

2. 函数 $y = -x^2 + 8x (0 \leq x \leq 5)$ 的值域是 ()

- A. $[0, 15]$ B. $[0, 16]$
C. $[15, 16]$ D. $(-\infty, 16]$

3. 函数 $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1}$ 的值域_____.

有1

第六讲

函数的单调性

模块	相关知识视频	难度
拔高拓展	1.3.2.1 复合函数单调性	2 星
	1.3.2.2 分段函数的应用	2 星



有1

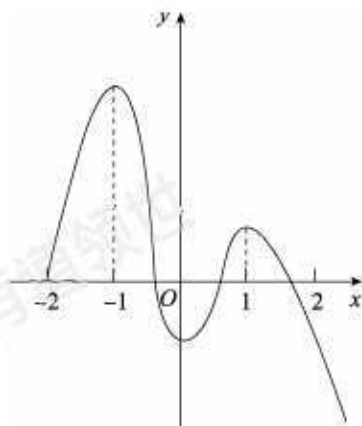
【基础巩固】

单调性的概念

【例1】

如图是函数 $y=f(x)$ 的图象，其定义域为 $[-2, +\infty)$ ，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是

()

A. $[-1, 0)$ B. $[1, +\infty)$ C. $[-1, 0), [1, +\infty)$ D. $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$

【例2】

若函数 $f(x)$ 是 R 上的减函数，则下列各式成立的是

()

A. $f(a) > f(2a)$ B. $f(a^2) < f(a)$ C. $f(a^2+2) < f(2a)$ D. $f(a^2+1) > f(a)$

【拓展拔高】

复合函数单调性

【例9】

判断以下函数单调性:

①函数 $y = \sqrt{x-1}$.

②函数 $y = \sqrt{4-2x}$.

【例10】

判断以下函数单调性:

$$f(x) = x + \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = x - \sqrt{1-x}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$

$$f(x) = x - \sqrt{x+1}$$

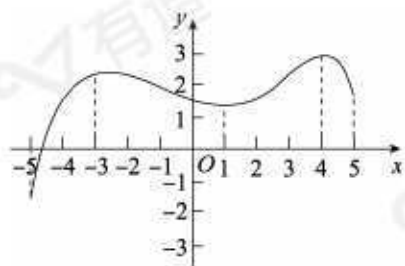
$$f(x) = x + \sqrt{1-x}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$$

【随堂练习】

1. (多选)图中是定义在区间 $[-5, 5]$ 上的函数 $y=f(x)$, 则下列关于函数 $y=f(x)$ 的说法正确的是 ()



- A. 函数在区间 $[-5, -3]$ 上单调递增
 B. 函数在区间 $[1, 4]$ 上单调递增
 C. 函数在区间 $[-3, 1] \cup [4, 5]$ 上单调递减
 D. 函数在区间 $[-5, 5]$ 上没有单调性
2. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的单调减区间是 ()
- A. $(0, +\infty)$
 B. $(-\infty, 0)$
 C. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 D. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且 $f(2) = 3$, 则满足 $f(2x-3) < 3$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{3}{2}, 3)$

C. $(-\infty, 3)$

D. $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

4. 若函数 $y = x^2 + 2mx + 1$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $[-2, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(-\infty, 2)$

D. $(-\infty, 2]$

5. 函数 $f(x) = ax^2 + b$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 则 a, b 应满足 ()

A. $a < 0, b \in \mathbf{R}$

B. $a < 0, b \neq 0$

C. $a < 0, b = 0$

D. $a > 0, b \in \mathbf{R}$

6. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上为增函数, 求实数 a 的取值范围.

7. 已知函数 $f(x) = \frac{ax-1}{x-a}$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B. $(-1, 1)$

C. $(-\infty, -1) \cup (1, 2]$

D. $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$

【展望秋季】

1. 已知函数 $f(x)$ 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 总有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, 并且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$

(1) 求证: $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数;

(2) 若 $f(4) = 5$, 求解不等式 $f(3m^2 - m - 2) < 3$.

2. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}_+$ 上, 对于任意 $a, b \in \mathbf{R}_+$, 有 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 求证:

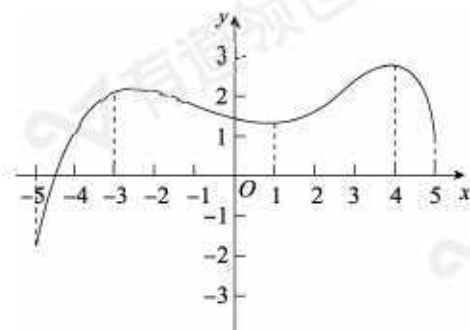
(1) $f(1) = 0$;

(2) $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$;

(3) 若 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数.

【课后巩固】

1. 已知函数 $f(x)$, $x \in [-5, 5]$ 的图像如图所示, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 _____.



2. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是单调函数, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- A. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$
C. $(-\infty, 0]$ D. $[0, 2]$

3. 函数 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 的单调减区间为 _____.

有1

第七讲

函数的奇偶性

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	1.3.2.5 函数奇偶性的判断	2 星
核心精讲	1.3.2.6 奇偶性的应用	3 星
拔高拓展	1.3.2.8 对称性	3 星



有1

【基础巩固】

函数奇偶性的定义

【例1】

下列说法正确的是

- ()
- A. 如果一个函数的定义域关于坐标原点对称，则这个函数为奇函数
 - B. 如果一个函数为偶函数，则它的定义域关于坐标原点对称
 - C. 如果一个函数的定义域关于坐标原点对称，则这个函数为偶函数
 - D. 如果一个函数的图象关于 y 轴对称，则这个函数为奇函数

【例2】

判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x) = 5x + 3$;

(2) $f(x) = 5x$;

(3) $f(x) = 2x^2 + 1$;

(4) $f(x) = x^2 + 6x + 9$;

(5) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x^4$;

(6) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

已知奇偶性求参

【例3】

若函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是奇函数, 则 a 的值为 ()

- A. 1 B. 0 C. -1 D. ± 1

【例4】

已知函数 $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+a)}$ 为奇函数, 则 a 的值为 _____.

【例5】

已知函数 $f(x) = 3ax^2 + bx - 5a + b$ 是偶函数, 且其定义域为 $[6a-1, a]$, 则 $a+b =$ ()

- A. $\frac{1}{7}$ B. -1 C. 1 D. 7

【核心精讲】

求值求解析式

【例6】

已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x < 0$ 时， $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ ，则 $f(1) =$ ()

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

【例7】

设 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = x(1+x)$ ，则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f(x)$ 等于 ()

A. $x(1+x)$ B. $-x(1+x)$ C. $x(1-x)$ D. $-x(1-x)$

【例8】

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = x^3 - x^2$ ，则当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 的解析式为_____.

【拓展拔高】

函数的对称性

【例9】

已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 那么 $f(2)$ 等于 ()

- A. -26 B. -18 C. -10 D. 10

【例10】

对于函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$ ($a, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{Z}$), 选取 a, b, c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$, 所得出的正确结果一定不可能是 ()

- A. 4 和 6 B. 3 和 1 C. 2 和 4 D. 1 和 2

【随堂练习】

1. 下列函数为偶函数的是 ()

A. $f(x) = x^2 (-1 < x < 3)$

B. $f(x) = \frac{x^4}{x}$

C. $f(x) = x^4 - 1$

D. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2. 下列判断正确的是 ()

A. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ 是奇函数

B. 函数 $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ 是偶函数

C. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ 是非奇非偶函数

D. 函数 $f(x) = 1$ 既是奇函数又是偶函数

3. (2024 · 上海高考真题第4题) 已知 $f(x) = x^3 + a$, $x \in R$, 且 $f(x)$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{(x+1)(2x+a)}$ 为奇函数, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 3a + b$ 是定义域为 $[a-1, 2a]$ 的偶函数, $a+b$ 的值是 ()

- A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. -1

6. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^3 - 2x$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式是 ()

- A. $f(x) = -x(x+2)$ B. $f(x) = x(x-2)$
C. $f(x) = -x(x-2)$ D. $f(x) = x(x+2)$

7. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x(x-1)$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) =$ _____.

8. 函数 $f(x) = ax + b \sin x + 1$, 若 $f(5) = 7$, 则 $f(-5) =$ _____.

【展望秋季】

1. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) + x^2$ 是奇函数, $f(x) + x^3$ 是偶函数, 则 $f(2)$ 等于_____.
2. 已知函数 $y=f(x)$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 对于任意非零实数 a, b , 满足 $f(ab) = f(a) + f(b)$, 且当 $x > 1$ 时 $f(x) > 0$,
 - (1) 求 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 的值;
 - (2) 判断并证明 $y=f(x)$ 的奇偶性和单调性;
 - (3) 求不等式 $f(x) + f(x-1) \leq 0$ 的解集

【课后巩固】

1. 下列函数是偶函数的是

()

A. $f(x) = -x^2 + 1$

B. $f(x) = x^3 - 1$

C. $f(x) = x + \frac{1}{x^3}$

D. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

2. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 3a + b$ 为偶函数, 其定义域为 $[a-3, 2a]$, 则 $a+b$ 的值为

()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

3. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(1+x)$, 则当 $x < 0$ 时, 有

()

A. $f(x) = -x(1+x)$

B. $f(x) = -x(1-x)$

C. $f(x) = x(1-x)$

D. $f(x) = x(x-1)$

考试实战训练



有1

2024 - 2025 学年广西部分名校联考高一(上)月考 数学试卷(10 月份)

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 命题 “ $\exists x \in R, x^3 + |x| - 2 > 0$ ” 的否定是 ()

- A. $\exists x \notin R, x^3 + |x| - 2 \leq 0$ B. $\exists x \in R, x^3 + |x| - 2 \leq 0$
C. $\forall x \in R, x^3 + |x| - 2 \leq 0$ D. $\forall x \notin R, x^3 + |x| - 2 \leq 0$

2. (5 分) 已知 $a, b, c \in R$, 则下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $a > b$, 则 $2 - a > 2 - b$
B. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
C. 若 $a(c^2 + 2) > b(c^2 + 2)$, 则 $a > b$
D. 若 $a < -b$, 则 $a^2 < b^2$

3. (5 分) 已知集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{x-2}\}$, $B = \{y \mid y = x^2 + 1\}$, 则 ()

- A. $A \cap B = \emptyset$ B. $A \cap B = A$
C. $A \cup B = A$ D. $\complement_R B \subseteq A$

4. (5分)若 $x > 1$, 则函数 $y = x + \frac{8}{x-1}$ 的最小值是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2} + 1$ D. $4\sqrt{2} + 1$

5. (5分)使函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x}}$ 有意义的一个充分不必要条件是 ()

- A. $0 < x < 2$ B. $0 \leq x \leq 2$
C. $0 \leq x \leq 3$ D. $-1 < x < 3$

6. (5分)现在,人们的生活水平有了很大的提高,在工作和生活之余喜欢参加体育锻炼活动. 为了解居民在这方面的兴趣情况,某社区选取某一栋楼房的居民进行了对骑自行车、打羽毛球、打篮球是否有兴趣的问卷调查,要求每位居民至少选择一项,经统计有 45 人对骑自行车感兴趣, 71 人对打羽毛球感兴趣, 60 人对打篮球感兴趣,同时对骑自行车和打羽毛球感兴趣的有 35 人,同时对打羽毛球和打篮球感兴趣的有 40 人,同时对骑自行车和打篮球感兴趣的有 18 人,三种都感兴趣的有 10 人,则该栋楼房的居民人数为 ()

- A. 91 B. 93 C. 95 D. 97

10. (多选)(6分)下列结论正确的是

()

- A. 若 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是奇函数, 则必有 $a \neq 0$ 且 $b=0$
- B. 函数 $y = \frac{x}{3x-1}$ 的单调递减区间是 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$
- C. $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + 3x$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 - 3x$
- D. 若 $f(x)$ 在 R 上是增函数, 且 $a = m-1$, $b = m^2$, 则 $f(a) + f(-b) < f(-a) + f(b)$

11. (多选)(6分)已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a+2b=2m$, 下列结论正确的是

()

- A. 若 $m = ab$, 则 ab 的最小值为 2
- B. 若 $m = 1$, 则 $a^2 + 2b^2$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$
- C. 若 $m = ab$, 则 $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为 2
- D. 若 $m = 1$, 则 $\frac{4}{a} + \frac{a}{b}$ 的最小值是 4

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. (5分)若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x-a}, & x > 0, \end{cases}$ 且 $f(f(-1)) = \frac{1}{2}$, 则 $a =$ _____.

13. (5分) 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 4m + 4)x^{m-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(2-x) > 1$ 的解集是_____.

14. (5分) 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x \in [1, 2]$, $g(x) = ax + 2a - 1$, $x \in [-1, 3]$. 对于任意的 $x_1 \in [1, 2]$, 存在 $x_2 \in [-1, 3]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 a 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。

15. (13分) 已知集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \mid x > 2m - 1\}$.
- (1) 当 $m = 1$ 时, 求 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$;
 - (2) 若 $A \cup B = B$, 求 m 的取值范围.

16. (15分)(1)求函数 $y = \frac{x^2 + 5}{x - 2} (x > 2)$ 的最小值;

(2)已知 $x < 0, y < 0$, 且 $x + y = -4$, 求 $\frac{9}{x} + \frac{1}{y}$ 的最大值.

17. (15分)已知函数 $f(x) = (m - 2)x^2 + (2m - 4)x + 4$.

(1)若 $f(x) = 0$ 有两个不相等的负根, 求 m 的取值范围;

(2)求 $f(x)$ 在 $[-3, 2]$ 上的最大值 $g(m)$;

(3)若函数 $y = \frac{mx + 1}{\sqrt{f(x)}}$ 的定义域为 R , 求实数 m 的取值范围.

18. (17分) 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y+2) = f(x+1) + f(y+1)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

(1) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(-4)$ 的值.

(2) 证明: $f(x)$ 是奇函数且在 R 上为增函数.

(3) 解关于 x 的不等式 $f(x^2) - f(3x) < f(ax) - f(3a)$.

19. (17分) 笛卡尔积是集合论中的一个基本概念, 由法国数学家笛卡尔首次引入. 笛卡尔积在计算机科学、组合数学、统计学等领域中有广泛的应用. 对于非空数集 A, B , 定义 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$, 将 $A \times B$ 称为“ A 与 B 的笛卡尔积”.

(1) 若 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 求 $(A \times B) \cap (B \times A)$.

(2) 若集合 C 是有限集, 将 C 的元素个数记为 $|C|$. 已知 A_1, A_2 是非空有限数集,

$|A_1 \times A_2| = m^3 (m \in N^*)$, 且 $\frac{|A_1 \times A_1| + |A_2 \times A_2|}{|A_2 \times A_1|} \geq a$ 对任意的集合 A_1, A_2 恒成立, 求 a 的取值范围, 并指明当 a 取到最值时, $|A_1|$ 和 $|A_2|$ 满足的关系式及 m 应满足的条件.

有1

第九讲

集合延拓

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	1.1.1.1 子集个数问题	2 星
	1.1.1.2 多子集个数问题	2 星
拔高拓展	1.1.3.1 【数学思维】集合创新题	4 星



有1

【基础拓展】

集合基础回顾

【例1】

(多选) 设 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x \mid ax + 1 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 则实数 a 的值可以为

- ()
- A. $-\frac{1}{5}$ B. 0 C. 3 D. $-\frac{1}{3}$

【例2】

设集合 $A = \{x \mid x + 1 \leq 0 \text{ 或 } x - 4 \geq 0\}$, $B = \{x \mid 2a \leq x \leq a + 2\}$

(1) 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

【例3】

数集 M 满足条件: 若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M (a \neq \pm 1, a \neq 0)$.

- (1) 若 $3 \in M$, 求集合 M 中一定存在的元素;
- (2) 集合 M 内的元素能否只有一个? 请说明理由;
- (3) 请写出集合 M 中的元素个数的所有可能值, 并说明理由.

【核心精讲】

子集个数问题

【例4】

已知集合 M 满足 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, 则所有满足条件的集合 M 的个数是

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【例5】

设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A \subseteq M$, A 不是空集, 且满足: 若 $a \in A$, 则 $6 - a \in A$, 则满足条件的集合 A 共有 _____ 个.

【例6】

集合 A, B, C (不必相异) 满足 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}$, 求满足条件的有序三元组 (A, B, C) 的个数.

【例7】

已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, A, B 都是 U 的子集, 且满足: $A \cup B = U$, $A \cap B \neq \emptyset$, 则满足条件的不同集合对 (A, B) 共有 _____ 对.

【例8】

已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则集合 A 各子集中元素之和为 ()
 A. 320 B. 240 C. 160 D. 8

【拔高拓展】

新定义问题

【例9】

(多选) 对于集合 A, B , 定义集合运算 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 则下列结论正确的有

- ()
- A. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
 B. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
 C. 若 $A = B$, 则 $A - B = \emptyset$
 D. 若 $A \subseteq B$, 则 $B - A = \emptyset$

【例10】

用 $C(A)$ 表非空集合 A 中元素的个数, 定义 $A * B = \begin{cases} C(A) - C(B), & C(A) \geq C(B) \\ C(B) - C(A), & C(A) < C(B) \end{cases}$, 若 $A = \{1\}$, $B = \{x \mid x(x^2 + ax + 2) = 0\}$, 且 $A * B = 1$, 设实数 a 的所有可能取值构成集合 S , 则 $C(S) =$ ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 9

【例11】

(北京高考真题解答压轴题第20题) 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} (k \geq 2)$, 其中 $a_i \in \mathbf{Z} (i = 1, 2, \dots, k)$, 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a + b \in A\}$, $T = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a - b \in A\}$, 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 T 中的元素个数为 n , 若对于任意的 $a \in A$, 总有 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P .

(1) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T .

(2) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$.

【随堂练习】

1. 若集合 $A = \{x \mid kx^2 + 4x + 4 = 0\}$ 中只有一个元素, 则实数 k 的值为 ()
- A. 0 或 1 B. 1 C. 0 D. $k < 1$

2. 设非空数集 M 同时满足条件① M 中不含元素 $-1, 0, 1$, ②若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M$. 则下列结论正确的是 ()
- A. 集合 M 中至多有 2 个元素
- B. 集合 M 中至多有 3 个元素
- C. 集合 M 中有且仅有 4 个元素
- D. 集合 M 中至少有 4 个元素

3. 已知集合 $P = \{-3, -2, 2, 3, 4\}$, 则满足 $\{-2, 2\} \subseteq Q \subseteq P$ 的集合 Q 的个数为 ()
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

4. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 若 A, B 均为 U 的非空子集且 $A \cap B = \emptyset$, 则满足条件的有序集合对 (A, B) 的个数为 ()

A. 16 B. 31 C. 50 D. 81

5. 若 $A \cap B = \{a, b\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, 则符合条件的不同有序集合对 (A, B) 共有 _____ 对.

6. 已知非空集合 A , 若对于任意 $x \in A$, 都有 $\frac{4}{x} \in A$, 则称集合 A 具有“反射性”. 则在集合 $\{1, 2, 4, 8\}$ 的所有子集中, 具有“反射性”的集合个数为 _____.

【课后巩固】

1. 设 $A = \{x \mid -2 < x < 5\}$, $B = \{x \mid m-1 \leq x \leq 2m+1\}$,

(1) 当 $x \in \mathbf{N}^+$ 时, 求 A 的子集的个数;

(2) 当 $x \in \mathbf{R}$ 且 $A \cap B = \emptyset$ 时, 求 m 的取值范围.

2. 若 $x \in A$, 且 $\frac{1}{x} \in A$, 则称 A 为“影子关系”集合. 在集合 $M = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\}$ 的

所有非空子集中, 为“影子关系”集合的有 ()

A. 3 个

B. 4 个

C. 7 个

D. 8 个

3. (2022 · 北京自主招生) 集合 A 、 B 的并集 $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 与 (B, A) 视为不同的集合对. 则这样的集合对 (A, B) 的个数是 _____.

第十讲

逻辑延拓

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	1.1.4.1 充分条件与必要条件	2 星
拔高拓展	1.1.4.2 【数学思维】数学逻辑思维	4 星



有1

【基础巩固】

充分条件与必要条件

【例1】

(2015·湖南高考真题第2题) 设 A, B 是两个集合, 则 “ $A \cap B = A$ ” 是 “ $A \subseteq B$ ” 的

()

- A. 充分不必要条件
C. 充要条件

- B. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

【例2】

(2020·天津高考真题第2题) 设 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 1$ ” 是 “ $a^2 > a$ ” 的

()

- A. 充分不必要条件
C. 充要条件

- B. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

【例3】

(多选) 已知条件 $p: |x| \mid x^2 + x - 6 = 0$, 条件 $q: |x| \mid xm + 1 = 0$, 且 p 是 q 的必要条件, 则 m 的值可以是

()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. 0

【核心精讲】

全称命题和特称命题

【例4】

(2015·新课标I高考真题第3题)设命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$
C. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 = 2^n$

【例5】

(2012·湖北高考真题第4题)命题“存在一个无理数, 它的平方是有理数”的否定是

()

- A. 任意一个有理数, 它的平方是有理数
B. 任意一个无理数, 它的平方不是有理数
C. 存在一个有理数, 它的平方是有理数
D. 存在一个无理数, 它的平方不是有理数

【例6】

(2016·浙江高考真题第4题)命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n \geq x^2$ ”的否定形式是

()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < x^2$
B. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < x^2$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < x^2$
D. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < x^2$

【例7】

命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, mx^2 + mx + 1 \geq 0$ 恒成立”是真命题, 则 m 的取值范围是_____.

【例8】

若命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - ax + 1 \leq 0$ ”是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{a \mid -2 \leq a \leq 2\}$ B. $\{a \mid a \leq -2 \text{ 或 } a \geq 2\}$
 C. $\{a \mid a < -2 \text{ 或 } a > 2\}$ D. $\{a \mid -2 < a < 2\}$

【例9】

若命题“ $\forall x \in [-1, 2], m \leq x^2 + 1$ ”是真命题, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, 2]$
 C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 5]$

【例10】

命题“ $\exists x \in [1, 2], x^2 + x - a \leq 0$ ”为假命题, 则 a 的取值范围为_____.

【拓展拔高】

双逻辑连接词

【例11】

已知函数 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax + 2 (a > 0)$, 若对 $\forall x_1 \in [-1, 2], \exists x_2 \in [-1, 2]$ 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, 3)$ C. $(0, 3]$ D. $[3, +\infty)$

【随堂练习】

1. “ $x^2 > 4$ ”是“ $x > 2$ ”成立的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. (2014·福建高考真题第5题)命题“ $\forall x \in [0, +\infty), x^3 + x \geq 0$ ”的否定是 ()
- A. $\forall x \in (-\infty, 0), x^3 + x < 0$
B. $\forall x \in (-\infty, 0), x^3 + x \geq 0$
C. $\exists x_0 \in [0, +\infty), x_0^3 + x_0 < 0$
D. $\exists x_0 \in [0, +\infty), x_0^3 + x_0 \geq 0$
3. 已知命题: $\exists x_0 \in \mathbf{R}, ax_0^2 + 2ax_0 - 1 \geq 0$ 为假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ B. $(-1, 0)$
C. $[-1, 0]$ D. $(-1, 0]$

【课后巩固】

1. “ $x > 3$ ” 是 “ $x^2 > 9$ ” 成立的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \geq 0$ ” 的否定为 ()
- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 < 0$
B. 不存在 $x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 < 0$
C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 \geq 0$
D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 < 0$
3. 若命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 12 > 0$ ” 是真命题, 则 a 的取值范围为 ()
- A. $(-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$ B. $(-\infty, 0] \cup (12, +\infty)$
C. $(0, 12)$ D. $[0, 12)$

不等式延拓



有1

