

高中数学核心基础知识填空及精讲

高二下学期

有道领世高中数学组编写



扫码查阅使用方法

目录

导数.....	2
概率统计.....	7



高中数学核心基础知识填空及精讲

导数

一、基础知识

1. 常见函数的导数公式

$$(1) (C)' = \underline{0};$$

$$(2) (nx)' = \underline{n};$$

$$(3) (x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}};$$

$$(4) (\sin x)' = \underline{\cos x};$$

$$(5) (\cos x)' = \underline{-\sin x};$$

$$(6) (a^x)' = \underline{a^x \ln a};$$

$$(7) (e^x)' = \underline{e^x};$$

$$(8) (\log_a x)' = \underline{\frac{1}{x \ln a}};$$

$$(9) (\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}.$$

2. 导数运算法则

$$(1) [f(x) \pm g(x)]' = \underline{f'(x) \pm g'(x)};$$

$$(2) [f(x) \cdot g(x)]' = \underline{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)};$$

$$(3) [C \cdot f(x)]' = \underline{Cf'(x)};$$

$$(4) \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \underline{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}.$$

3. 复合函数求导

$$f[g(x)]' = \underline{f'(g(x)) \cdot g'(x)}.$$

4. 曲线的切线方程

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是

曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率,

相应的切线方程是 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

5. 导数与函数单调性

函数 $y = f(x)$ 在某个区间 (a, b) 内任意一点可导,

如果 $f'(x) \geq 0$, 则 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增;

如果 $f'(x) \leq 0$, 则 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减.

如果函数在区间 (a, b) 上单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$;

如果函数在区间 (a, b) 上单调递减, 则 $f'(x) \leq 0$.

6. 函数的极值和最值

设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义,

如果对 x_0 附近所有的 x , 都有 $f(x) < f(x_0)$,

那么 $f(x_0)$ 是函数的一个极大值, 记作 $y_{\text{极大值}} = f(x_0)$;

如果对 x_0 附近所有的 x , 都有 $f(x) > f(x_0)$,

那么 $f(x_0)$ 是函数的一个极小值, 记作 $y_{\text{极小值}} = f(x_0)$.

极大值与极小值统称为极值.

将函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 内的各极值与端点处的函数值 $f(a)$ 、 $f(b)$ 比较,

其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

二、重要结论

1. 常见的导数原函数构造

(1) 见到 $xf'(x) + f(x) > 0$,

则构造函数 $g(x) = xf(x)$,

那么 $g'(x) = [xf(x)]' = xf'(x) + f(x) > 0$,

故 $g(x)$ 在定义域内为增函数.

(2) 见到 $xf'(x) - f(x) > 0$,

则构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$,

那么 $g'(x) = \left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$,

故 $g(x)$ 在定义域内为增函数.

(3) 见到 $f'(x) + f(x) > 0$,

则构造函数 $g(x) = e^x f(x)$,

那么 $g'(x) = [e^x f(x)]' = e^x [f'(x) + f(x)] > 0$,

故 $g(x)$ 在定义域内为增函数.

(4) 见到 $f'(x) - f(x) > 0$,

则构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

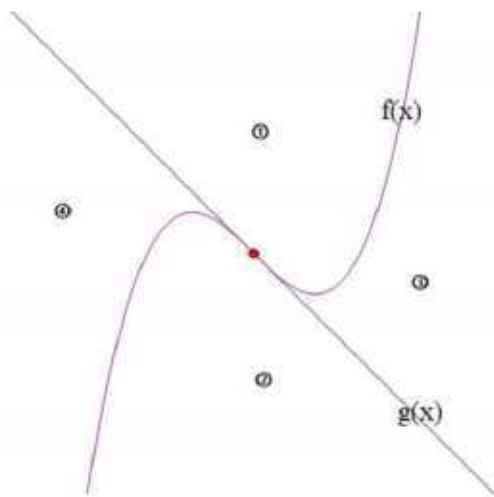
那么 $g'(x) = \left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$,

故 $g(x)$ 在定义域内为增函数.

2. 三次函数的切线问题

已知三次函数 $f(x)$ ，且 $g(x)$ 为 $f(x)$ 在对称中点处的切线，两条曲线将平面划分为 4 个区域，过函数 $f(x)$ 图象上或者图象外一点作 $f(x)$ 的切线，

- (1) 点位于区域①、区域②、 $f(x)$ 的对称中心上时，过点可作 $f(x)$ 的 1 条切线；
- (2) 点位于 $f(x)$ 图象上、 $g(x)$ 图象上时，过点可作 $f(x)$ 的 2 条切线；
- (3) 点位于区域③、区域④时，过点可作 $f(x)$ 的 3 条切线。



3. 三次函数对称中心

三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象关于点 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ 中心对称。

4. 求恒成立，有解或者无解命题中的参数取值范围

设函数 $f(x)$ 的值域为 (a, b) 或 $[a, b]$ 或 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 中的一种，则

若 $\lambda \geq f(x)$ 恒成立（即 $\lambda < f(x)$ 无解），则 $\lambda \geq f(x)_{\max}$ ；

若 $\lambda \leq f(x)$ 恒成立（即 $\lambda > f(x)$ 无解），则 $\lambda \leq f(x)_{\min}$ ；

若 $\lambda \geq f(x)$ 有解（即存在 x 使得 $\lambda \geq f(x)$ 成立），则 $\lambda \geq f(x)_{\min}$ ；

若 $\lambda \leq f(x)$ 有解（即存在 x 使得 $\lambda \leq f(x)$ 成立），则 $\lambda \leq f(x)_{\max}$ ；

若 $\lambda = f(x)$ 有解（即 $\lambda \neq f(x)$ 无解），则 $\lambda \in \{y \mid y = f(x)\}$ ；

$\lambda = f(x)$ 无解（即 $\lambda \neq f(x)$ 有解），则 $\lambda \in C_U \{y \mid y = f(x)\}$ 。

5. 双逻辑连接词的转化

$\forall x_1, \forall x_2$ 都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则只需要保证 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$;

$\forall x_1, \exists x_2$ 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则只需要保证 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$;

$\exists x_1, \forall x_2$ 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则只需要保证 $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max}$;

$\exists x_1, \exists x_2$ 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则只需要保证 $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min}$.

6. 常用函数放缩

(1) $e^x \geq x+1$, 当且仅当 $x=0$ 时取等;

(2) $\ln x \leq x-1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等;

(3) $\sin x \leq x \leq \tan x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$, 当且仅当 $x=0$ 时取等;

(4) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, x \in [0, \frac{\pi}{2})$, 当且仅当 $x=0$ 时取等.



高中数学核心基础知识填空及精讲

概率统计

一、基础知识

1. 排列数

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad n, m \in \mathbf{N}^*, \quad m \leq n.$$

全排列公式: $A_n^n = n!$, 规定 $0! = 1$.

2. 组合数

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad n, m \in \mathbf{N}^*, \quad m \leq n.$$

规定 $C_n^0 = 1$.

组合数的性质:

$$\textcircled{1} C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$\textcircled{2} C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m;$$

$$\textcircled{3} mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1};$$

$$\textcircled{4} C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}.$$

3. 二项式定理

$$(a+b)^n = \underline{C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n},$$

展开式中有 $n+1$ 项, 其中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = \underline{C_n^r a^{n-r} b^r}$.

4. 条件概率

$$\textcircled{1} P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)};$$

$$\textcircled{2} P(AB) = P(B|A) \cdot P(A);$$

$$\textcircled{3} P(A) = P(A|B) + P(A|\bar{B}).$$

条件概率的性质:

$$\textcircled{1} B \text{ 和 } C \text{ 互斥, 则 } P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A);$$

$$\textcircled{2} A \text{ 和 } B \text{ 相互独立, 则 } P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A).$$

5. 离散型随机变量及其分布列

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

我们称这个表为离散型随机变量 X 的概率分布或分布列.

其中 $p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots + p_n = \underline{1}$.

6. 离散型随机变量的数字特征

(1) 数学期望

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_i p_i + \cdots + x_n p_n.$$

(2) 方差

$$D(x) = [x_1 - E(x)]^2 p_1 + [x_2 - E(x)]^2 p_2 + \cdots + [x_i - E(x)]^2 p_i + \cdots + [x_n - E(x)]^2 p_n.$$

$D(x)$ 的算术平方根 $\sqrt{D(x)}$ 叫做 标准差.

7. 一元线性回归模型

回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$.

$$\text{其中 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

8. 线性相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}.$$

(1) 当 $r > 0$ 时, 表明两个变量 正相关; 当 $r < 0$ 时, 表明两个变量 负相关;

(2) $|r| \leq 1$, 且 $|r|$ 越接近于 1, 两个变量的线性相关程度 越强; $|r|$ 越接近于 0, 两个变量的线性相关程度 越弱.

9. 列联表

一般地, 假设有两个分类变量 X 和 Y , 它们的取值分别是 $\{x_1, x_2\}$ 和 $\{y_1, y_2\}$, 其样本频数列联表 (称为 2×2 列联表) 如下

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

10. 独立性检验

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \text{其中 } n = a+b+c+d \text{ 为样本容量.}$$

利用上述公式, 根据 2×2 列联表中的数据求出 K^2 , 继而判断随机变量 X 和 Y 关系的程度.

二、重要结论

1. 两点分布

如果随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布，其分布列为

X	1	0
P	p	$1-p$

此时 $E(x) = p$, $D(x) = p(1-p)$.

2. 二项分布

随机变量 X 服从二项分布，记作 $X \sim B(n, p)$ ，其分布列为

X	0	1	...	k	...	n
P	$C_n^0 (1-p)^n$	$C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1}$	...	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	...	$C_n^n p^n$

其数学期望为 $E(x) = np$ ，方差为 $D(x) = np(1-p)$.

3. 正态分布

期望为 μ ，标准差为 σ 的正态分布记为 $N(\mu, \sigma)$.

正态曲线具有以下性质：

(1) 曲线关于 $x = \mu$ 对称，且在 $x = \mu$ 时位于最高点；

(2) 当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 决定：

σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越 分散；

σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越 集中；

(3) 正态曲线下的总面积为 1.