

高二

数学

精讲精练（下）

有道高中教研组 编著

预约陪陪 +wangyushu2013

目录

001 模块4 选择性必修二

003 专题4.1 一元函数的导数及其应用

003 考点4.1.1 导数的概念及其意义

004 4.1.1.1 导数的定义(基础)

007 4.1.1.2 导数的定义(进阶)

010 4.1.1.3 求在P点处的切线

012 4.1.1.4 求过P点的切线

014 4.1.1.5 判断切线条数问题

016 4.1.1.6 公切线问题【菁英专属】

017 4.1.1.7 用切线计算距离最值【目标专属】

019 考点4.1.2 导数的运算

021 4.1.2.1 基本初等函数的导数及运算法则(基础)

025 4.1.2.2 基本初等函数的导数及运算法则(进阶)

028 4.1.2.3 复合函数的导数

032 4.1.2.4 导数的原函数构造

034 4.1.2.5 【数学思维】导数的原函数构造速解技巧

036 4.1.2.6 【数学思维】隐函数求导【菁英专属】

038 考点4.1.3 二次函数基础

039 4.1.3.1 含参二次不等式的分类讨论【提高专属】

042 4.1.3.2 二次方程根的分布(基础)【提高专属】

044 4.1.3.3 二次方程根的分布(进阶)【提高专属】

045 4.1.3.4 二次恒成立模型【提高专属】

048	考点 4.1.4 导数在研究函数中的应用
049	4.1.4.1 不含参函数的单调性
052	4.1.4.2a 含参函数单调性讨论之可因式分解型(上)
053	4.1.4.2b 含参函数单调性讨论之可因式分解型(下)
054	4.1.4.3 含参函数单调性讨论之类二次型
056	4.1.4.4a 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(上)
058	4.1.4.4b 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(下)【目标、菁英专属】
059	4.1.4.5 含参函数单调性讨论之超越函数【目标、菁英专属】
061	4.1.4.6 已知单调性求参之导数为二次型【目标专属】
063	4.1.4.7 已知单调性求参之导数为非二次型【目标专属】
066	4.1.4.8 极值与极值点
069	4.1.4.9 最值与值域之具体函数
071	4.1.4.10 最值讨论与值域之含参函数【提高专属】
073	专题 4.2 一元函数的导数及其应用的综合提升
073	考点 4.2.1 恒成立问题之已知恒成立求参数范围
074	4.2.1.1 导数可因式分解型分类讨论【提高专属】
076	4.2.1.2 参变分离法
078	4.2.1.3 洛必达法则【菁英专属】
080	4.2.1.4 双逻辑连接词的函数问题之单函数单调性构造【目标、菁英专属】
082	4.2.1.5 双逻辑连接词的函数问题之双函数最值构造【菁英专属】
084	考点 4.2.2 恒成立问题之证明不等式
085	4.2.2.1 主元法【菁英专属】
087	4.2.2.2 常用函数放缩【菁英专属】
089	4.2.2.3 分离函数法【菁英专属】

- 091 考点 4.2.3 根与方程问题之根与零点问题
- 091 4.2.3.1a 参变分离法(上)【提高专属】
- 093 4.2.3.1b 参变分离法(下)【提高专属】
- 094 4.2.3.2 导数可因式分解型分类讨论(上)(下)【提高专属】
- 097 考点 4.2.4 根与方程问题之双零点问题
- 098 4.2.4.1a 极值点偏移模型(上)【目标、菁英专属】
- 099 4.2.4.1b 极值点偏移模型(下)【菁英专属】
- 101 4.2.4.2 双变量的换元构造【菁英专属】
- 102 考点 4.2.5 根与方程问题之极值点问题
- 102 4.2.5.1 单极值点问题【目标、菁英专属】
- 104 4.2.5.2 双极值点问题【菁英专属】
- 106 考点 4.2.6 导数拔高拓展
- 106 4.2.6.1 导数多选题与应试思维综合运用
- 108 4.2.6.2 【数学思维】求和型放缩(上)【菁英专属】
- 110 4.2.6.3 【数学思维】求和型放缩(下)【菁英专属】
- 113 模块 5 选择性必修三
- 115 专题 5.1 计数原理
- 115 考点 5.1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理
- 116 5.1.1.1 枚举法及规律性枚举
- 118 5.1.1.2 加法原理和乘法原理的应用
- 120 5.1.1.3 计数原理的简单应用与综合运用【提高专属】
- 123 5.1.1.4 多子集个数速算技巧
- 125 考点 5.1.2 排列与组合
- 126 5.1.2.1 排列数、组合数的概念与综合计算

129	5.1.2.2	特元特位
131	5.1.2.3	相邻捆绑
133	5.1.2.4	插空法模型
135	5.1.2.5	分组分配模型(上)(下)
140	5.1.2.6	定序与部分元素相同模型【提高、目标专属】
142	5.1.2.7	隔板法模型
144	5.1.2.8	链状染色模型
147	5.1.2.9	间接计数模型与容斥原理【提高、目标专属】
149	5.1.2.10	排列组合的综合应用【提高专属】
152	考点 5.1.3	二项式定理
153	5.1.3.1	杨辉三角形的性质与二项展开式的通项【提高、目标专属】
156	5.1.3.2	二项式定理的系数和【提高、目标专属】
159	5.1.3.3	换元法与多项式展开【目标专属】
161	专题 5.2	随机变量及其分布
161	考点 5.2.1	概率基础与条件概率
163	5.2.1.1	用排列组合计算古典概型的相关问题
166	5.2.1.2	概率的乘法原理
168	5.2.1.3	条件概率公式的概念与应用
171	5.2.1.4	全概公式【菁英专属】
173	5.2.1.5	事件的独立性【目标、菁英专属】
175	5.2.1.6	条件概率多选题与应试思维综合应用
177	考点 5.2.2	离散型随机变量及其分布列
178	5.2.2.1	随机变量的概念与简单分布列【提高专属】

181	考点 5.2.3 离散型随机变量的数字特征
182	5.2.3.1 期望
185	5.2.3.2 方差与标准差
189	5.2.3.3 【数学思维】数字特征的意义与策略的应用【目标、菁英专属】
191	5.2.3.4 【数学思维】实际问题中复杂概率的计算【目标专属】
194	考点 5.2.4 二项分布与超几何分布
195	5.2.4.1 两点分布【提高专属】
198	5.2.4.2 二项分布
201	5.2.4.3 超几何分布
205	5.2.4.4 【数学思维】几何分布【目标专属】
208	考点 5.2.5 正态分布
209	5.2.5.1 正态分布
212	5.2.5.2 标准正态分布【目标专属】
215	5.2.5.3 概率统计多选题与应试思维综合应用
218	专题 5.3 成对数据的统计分析
218	考点 5.3.1 成对数据的统计相关性
219	5.3.1.1 相关系数的计算【提高专属】
222	考点 5.3.2 一元线性回归模型及其应用
222	5.3.2.1 线性回归方程的计算【提高专属】
226	5.3.2.2 非线性回归方程计算【目标专属】
229	考点 5.3.3 列联表与独立性检验
229	5.3.3.1 卡方独立性检验【提高、目标专属】

选择性必修二



专题 4.1 一元函数的导数及其应用

考点 4.1.1 导数的概念及其意义

【知识梳理】

1. 从变化率到导数定义

(1) 对于函数 $y=f(x)$, 设自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$, 相应的, 函数值 y 就从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$, 这时, x 的变化量为 Δx , y 的变化量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,

我们把比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 叫作函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率.

(2) 如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限, 则称 $y=f(x)$

在 $x=x_0$ 处可导, 并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数(也称瞬时变化率),

记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即 $f'(x_0)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 也就是说, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率是 $f'(x_0)$, 切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

求切线方程的说法有“在某点处的切线”和“过某点的切线”的区别, 注意: 在某点处的切线, 该点即为切点, 过某点的切线, 该点未必是切点.

3. 曲线上的点到直线距离的最小值

曲线 $y=f(x)$ 上的点到直线 $y=kx+b$ 距离的最小值, 当曲线在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线平行时取得, 即 $f'(x_0)=k$.

4. 导函数

一般地, 如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域内的每一点 x 都可导, 则称 $f(x)$ 可导. 此时, 对定义域内的每一个值 x , 都对应一个确定的导数 $f'(x)$. 于是, 在 $f(x)$ 的定义域内, $f'(x)$ 是一个函数, 这个函数通常称为函数 $y=f(x)$ 的导函数, 记为 $f'(x)$ (或 y', y'_x), 即

$$f'(x)=y'=y'_x=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

导函数通常也简称为导数.

【典型例题】



4.1.1.1 导数的定义(基础) 难度☆☆☆

【例1】

为了保障道路交通安全,很多地方都在公路上设置了测速摄像头,其原理是在时刻 x_1 和 x_2 ($x_2 > x_1$) 分别拍摄汽车的照片,计算出汽车在 x_1 到 x_2 之间移动的距离 S ,并将这段时间内的平均速度 $\frac{S}{x_2 - x_1}$ 作为汽车的行驶速度,并判断其是否超速.

已知某限速为 80 千米/小时的直线路段上设置了测速摄像头,若一辆车从某时刻开始计时,经过 x 秒后,这辆车与某标志物的距离为 y 米,现已知当 $x \in [4, 5]$ 时, $y = f(x) = 100 - \frac{400}{x}$

- (1)若测速摄像头拍照的时刻为 $x_1 = 4$, $x_2 = 5$,请判断该车是否超速?
- (2)交通管理部门对测速摄像头进行了升级,使其可以在更短时间内完成连续两次拍照.若测速摄像头拍照的时刻为 $x_1 = 4$, $x_2 = 4.5$,请判断该车是否超速?
- (3)请判断该车在 $x \in [4, 5]$ 的实际行驶中是否超速?若不超速,最大速度是多少?若超速,这辆车是否超速达 10%?

【例2】

(1) 若 $f'(1) = -1$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$ ()

A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

(2) 设 $f(x)$ 为可导函数, 且满足条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线的斜率为 ()

A. 2

B. -1

C. $\frac{1}{2}$

D. -2

【例3】

(1) 已知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数为 A .

求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 及 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 的值.

(2) 若 $f'(x_0) = -3$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 3h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) (2000 上海交通大学保送生考试真题) 设 $f'(x_0) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} =$ ()

A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

(4) (2000 上海交通大学自主招生考试真题)

已知 $f(x)$ 和 $f'(x)$, 且在 x_0 处可导, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 3h) - f'(x_0 - h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$



4.1.1.2 导数的定义(进阶)

难度



【例1】

求下列函数在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率, 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 和定义域上的导函数 $f'(x)$:

(1) $f(x) = kx$;

(2) $f(x) = x^2$;

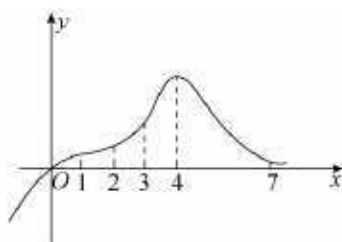
(3) $f(x) = x^3$;

(4) $f(x) = \frac{1}{x}$;

(5) $f(x) = \sqrt{x}$;

【例2】

函数 $f(x)$ 的图象如图, 则函数 $f(x)$ 在下列区间上平均变化率最大的是 ()

A. $[1, 2]$ B. $[2, 3]$ C. $[3, 4]$ D. $[4, 7]$

【例3】

函数 $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$ 在 $[0, 1]$ 的平均变化率分别记为 m_1 , m_2 , m_3 , 则下面结论正确的是 ()

A. $m_1 = m_2 = m_3$ B. $m_1 > m_2 > m_3$ C. $m_2 > m_1 > m_3$ D. $m_1 < m_2 < m_3$

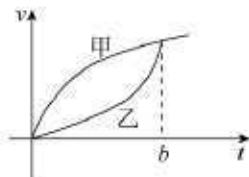
【例 4】

下列函数中, 增长速度最慢的是 ()

- A. $y = e^x$ B. $y = \ln x$ C. $y = x^{100}$ D. $y = 2^x$

【例 5】

甲、乙速度 v 与时间 t 的关系如图, $a(b)$ 是 $t=b$ 时的加速度, $S(b)$ 是从 $t=0$ 到 $t=b$ 的路程, 则 $a_{\text{甲}}(b)$ 与 $a_{\text{乙}}(b)$, $S_{\text{甲}}(b)$ 与 $S_{\text{乙}}(b)$ 的大小关系是 ()



- A. $a_{\text{甲}}(b) > a_{\text{乙}}(b)$, $S_{\text{甲}}(b) > S_{\text{乙}}(b)$
 B. $a_{\text{甲}}(b) < a_{\text{乙}}(b)$, $S_{\text{甲}}(b) < S_{\text{乙}}(b)$
 C. $a_{\text{甲}}(b) < a_{\text{乙}}(b)$, $S_{\text{甲}}(b) > S_{\text{乙}}(b)$
 D. $a_{\text{甲}}(b) > a_{\text{乙}}(b)$, $S_{\text{甲}}(b) < S_{\text{乙}}(b)$

4.1.1.3 求在 P 点处的切线

难度 ★★★

【例1】

(2020 新课标 I 卷高考真题理科第 6 题) 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()

A. $y = -2x - 1$

B. $y = -2x + 1$

C. $y = 2x - 3$

D. $y = 2x + 1$

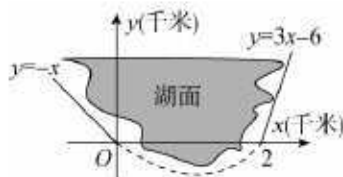
【例2】

(2021 全国甲卷高考真题理科第 13 题) 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.

【例3】

(2014 陕西高考真题文科压轴难题第 10 题) 如图, 修建一条公路需要一段环湖弯曲路段与两条直道平滑连接(相切), 已知环湖弯曲路段为某三次函数图象的一部分, 则该函数的解析式为

()



A. $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$

B. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$

C. $y = \frac{1}{4}x^3 - x$

D. $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

【例 4】

(2020 新课标Ⅲ卷高考真题理科第 21 题) 设函数 $f(x) = x^3 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点

$(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直.

(1) 求 b ;

【例 5】

若函数 $y = f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y = f(x)$ 具有 T 性质. 下列函数中具有 T 性质的是 ()

A. $y = \ln x$

B. $y = \cos x$

C. $y = e^x$

D. $y = \sqrt{x}$

【例6】

(2016 新课标Ⅲ卷高考真题理科第15题)已知 $f(x)$ 为偶函数,当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x) + 3x$,则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, -3)$ 处的切线方程是_____.

【例7】

(2010 辽宁高考真题理科第10题)已知点 P 在曲线 $y = \frac{4}{e^x + 1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角,则 α 的取值范围是_____.

A. $[0, \frac{\pi}{4})$

B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$

D. $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$

4.1.1.4 求过 P 点的切线

难度 ★★★

【例1】

曲线 $f(x) = x^2 + 1$ 过点 $P(1, 0)$ 的切线方程是_____.



4.1.1.5 判断切线条数问题

难度 ★★★

【例1】

(2021 新高考 I 卷高考真题第 7 题)若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线, 则

()

A. $e^b < a$

B. $e^a < b$

C. $0 < a < e^b$

D. $0 < b < e^a$

【例2】

若过定点 $P(1, e)$ 恰好可作曲线 $y = ae^x (a > 0)$ 的两条切线, 则实数 a 的取值范围是_____.

【例3】

若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = \ln x + 1$ 的两条切线, 则

()

A. $b < \ln a$

B. $b > \ln a + 1$

C. $a < 0$

D. $b > e^a$

【例4】

已知函数 $f(x) = x^3 - 9x$, 过点 $A(1, m) (m \neq -8)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则实数 m 的取值范围是

()

A. $(0, 8)$

B. $(-8, 8)$

C. $(-\infty, -8)$

D. $(-9, -8)$

【例5】

已知函数 $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$, 若过点 $P(1, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则 t 的取值范围是_____.

【例6】

如果过点 $(0, 1)$ 可作曲线 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$ 的三条切线, 则实数 c 的取值范围是

()

A. $(-\infty, \frac{1}{3})$

B. $(\frac{2}{3}, 1)$

C. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

D. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

【例7】

(2014 北京卷文科高考真题压轴难题第 14 题) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$.

(Ⅲ) 问过点 $A(-1, 2)$, $B(2, 10)$, $C(0, 2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切? (只需写出结论)



4.1.1.6 公切线问题

难度 ★★★

菁英专属

【例1】

(2024 新课标 I 卷高考真题第 13 题) 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.

【例2】

(2016 新课标 II 卷高考真题填空压轴第 16 题) 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线, 也是曲线 $y = \ln(x+1)$ 的切线, 则 $b =$ _____.

【例3】

已知函数 $f(x) = a \ln x$, $g(x) = be^x$, 若直线 $y = kx (k > 0)$ 与函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都相切, 则 $a + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____ ()

A. 2

B. $2e$ C. e^2 D. $\sqrt{e}$

【例4】

若函数 $f(x) = \ln x (0 < x \leq 1)$ 与函数 $g(x) = x^2 + a$ 有两条公切线, 则实数 a 的取值范围是 _____ ()

A. $(-\ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(-\ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ C. $(-\ln \sqrt{2}, -\frac{3}{4}]$ D. $(-\ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}]$



4.1.1.7 用切线计算距离最值

难度 ★★★

目标专属

【例1】

曲线 $y = \ln x$ 上的点到直线 $y = x + 2$ 的最短距离是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

【例2】

(2019 江苏卷高考真题第 10 题) 在平面直角坐标系 xOy 中, P 是曲线 $y = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 上的一个动点, 则点 P 到直线 $x + y = 0$ 的距离的最小值是_____.

【例3】

设动直线 $x = m$ 与函数 $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$ 的图象分别交于点 M, N , 则 $|MN|$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【例4】

设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$ 的图像分别交于点 M, N , 则 $|MN|$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{4} + \ln 2$ C. $\frac{5}{4} - \ln \frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$

【例5】

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

【例6】

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_1) = f(x_2) (x_1 < x_2)$, 则 $x_2 - x_1$ 的取值范围为 ()

- A. $[e, +\infty)$ B. $[4-2\ln 2, +\infty)$
C. $[4-2\ln 2, e]$ D. $[e-1, +\infty)$

考点 4.1.2 导数的运算

【知识梳理】

1. 基本初等函数的导数

原函数	导函数
$f(x) = c (c \text{ 为常数})$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha (\alpha \in \mathbf{Q})$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

2. 导数的四则运算

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$[Cf(x)]' = Cf'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

注：① $f(x)$ 、 $g(x)$ 必须是可导函数.

②若两个函数可导，则它们和、差、积、商必可导；若两个函数均不可导，则它们的和、差、积、商不一定不可导.

3. 复合函数求导法则

复合函数 $u(x) = f(g(x))$ 由外层函数 $u = f(t)$ 和内层函数 $t = g(x)$ 构成：

$$[f(g(x))]' = f'(t)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

4. 导数的原函数构造

(1) $f(x)$ 和 $f'(x)$ 结合的不等关系

在解决 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 结合的不等式问题中, 会有一种方法是: 通过现有导数构造出原函数, 再结合函数的性质等来解不等式.

此方法中, 如何构造出原函数是重难点, 我们可以按照以下思路进行:

判断原函数的结构是乘法还是除法;

判断原函数是幂函数、指数函数、还是三角函数(常考).

(2) $f(x)$ 和 $f'(x)$ 结合的等式关系

思路: 虚设原函数 $h(x)$ (不可解), 再将 $h(x)$ 及 $h'(x)$ 代入所求的式子中进行求解.

5. 导数、微分与微商

$$(1) \text{ 导数: } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(2) 微分: $\Delta x \rightarrow 0$ 时, Δx 记为 dx , 即微分

$$(3) \text{ 微商: } \frac{dy}{dx}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

6. 偏导数

在数学中, 一个多变量的函数的偏导数, 就是它关于其中一个变量的导数而保持其他变量恒定(相对于全导数, 在其中所有变量都允许变化).

对二元函数 $z = f(x, y)$, $z'_{\cdot x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z'_{\cdot y} = \frac{\partial z}{\partial y}$

7. 全微分

$$df(x, y) = f'_{\cdot x} dx + f'_{\cdot y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

【典型例题】



4.1.2.1 基本初等函数的导数及运算法则(基础)

难度 ★☆☆☆

【例1】

求下列函数的导函数

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = \ln x$

(3) $f(x) = \cos x - 2x + 1$

(4) $f(x) = 5x^2 - 2\sin x + 6$

【例2】

求下列函数的导函数

(1) (2020 海南卷高考真题第 22 题) 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

(2) (2005 湖南卷高考真题理科第 6 题) 设 $f_0(x) = \sin x$, $f_1(x) = f_0'(x)$, $f_2(x) = f_1'(x)$, $\dots$, $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $n \in \mathbf{N}$, 则 $f_{2005}(x) =$ ()

A. $\sin x$

B. $-\sin x$

C. $\cos x$

D. $-\cos x$

(3) (2021 新高考 I 卷高考真题第 22 题) 已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(4) (2018 天津卷高考真题文科第 10 题) 已知函数 $f(x) = e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为_____.

【例 3】

(2009 安徽卷高考真题文科第 9 题) 设函数 $f(x) = \frac{\sin\theta}{3}x^3 + \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{2}x^2 + \tan\theta$, 其中 $\theta \in [0, \frac{5\pi}{12}]$,

则导数 $f'(1)$ 的取值范围是 ()

A. $[-2, 2]$

B. $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

C. $[\sqrt{3}, 2]$

D. $[\sqrt{2}, 2]$

【例 4】

求下列函数的导函数

(1) (2020 新课标Ⅲ卷高考真题文科第 15 题) 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$, 若 $f'(1) = \frac{e}{4}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) (2021 全国甲卷高考真题理科第 21 题) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a} (x > 0)$.

(3) (2018 新课标Ⅲ卷高考真题文科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$.

(4) (2021 北京卷高考真题第 19 题) 已知函数 $f(x) = \frac{3 - 2x}{x^2 + a}$.

(5) (2016 新课标Ⅱ卷高考真题理科第 21 题) (Ⅰ) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$

(Ⅱ) $g(x) = \frac{e^x - ax - a}{x^2} (x > 0)$



4.1.2.2 基本初等函数的导数及运算法则(进阶)

难度 ★☆☆

【例1】

(2004 贵州卷高考真题文科第4题)函数 $y = (x+1)^2(x-1)$ 在 $x=1$ 处的导数等于

()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【例2】

(2019 江苏卷高考真题第19题)设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, 求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$.

【例3】

(2010 江西卷高考真题理科第5题) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_8 = 4$, 函数 $f(x) = x(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_8)$, 则 $f'(0) =$ ()

- A. 2^6 B. 2^9 C. 2^{12} D. 2^{15}

【例4】

已知 $f(x) = x^3 - 2xf'(1)$, 则 $f'(2)$ 等于 ()

- A. 11 B. 10 C. 8 D. 1

【例5】

已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = f'(e) \ln x + 2x$, 则 $f'(e) =$ ()

- A. 1 B. -1 C. $\frac{2e}{e-1}$ D. $-\frac{2e}{e-1}$

【例6】

(2009 湖北卷高考真题理科第 14 题) 已知函数 $f(x) = f'(\frac{\pi}{4}) \cos x + \sin x$, 则 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值为

_____.

【例7】

已知函数 $g(x)$ 为可导偶函数, $f(x) = g(x) + c$ (c 为常数), 若 $f'(1) = 2$, 则 $f'(-1) =$

()

A. -2

B. -1

C. 2

D. 0

【例8】

(2010 江西卷高考真题文科第 4 题) 若 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 满足 $f'(1) = 2$, 则 $f'(-1) =$

()

A. -4

B. -2

C. 2

D. 4



4.1.2.3 复合函数的导数

难度 ★☆☆

【例1】

求下列函数的导函数

(1) (2012 全国华侨、港澳、台联考高考真题第 2 题) 函数 $f(x) = 2^x + \ln(2x+1)$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'(0) =$ ()

A. $2 + \ln 2$ B. $1 + \ln 2$

C. 2

D. 3

(2) (2019 全国华侨、港澳、台联考高考真题第 13 题) 若函数 $f(x) = e^{ax} + \ln(x+1)$, $f'(0) = 4$, 则 $a =$ _____.

(3) (2017 新课标 I 卷高考真题第 21 题) 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$.

(4) (1982 全国高考真题理科第 3 题) 求 $y = \cos^2 \frac{x}{3}$ 的导数.

(5) (2015 北京卷高考真题第 18 题) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$,

【例2】

求出下列函数的导函数

(1) (2014 江西卷高考真题理科第 19 题) 已知函数 $f(x) = (x^2 + bx + b) \sqrt{1 - 2x} (b \in \mathbf{R})$

(2) (1977 福建高考真题理科第 20 题) 求函数 $y = e^{-2x} \sin(5x + \frac{\pi}{4})$ 的导数.

(3) (2020 新课标 II 卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$.

(4) (2017 浙江卷高考真题第 20 题) 已知函数 $f(x) = (x - \sqrt{2x-1})e^{-x} (x \geq \frac{1}{2})$.

(1) 求 $f(x)$ 的导函数;



4.1.2.4 导数的原函数构造

难度 ★★★

【例1】

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 其导函数 $f'(x) < 4$ 恒成立且 $f(1) = 3$, 则不等式 $f(x) < 4x - 1$ 的解集为

()

A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

【例2】

定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $x^2 f'(x) + 1 > 0$, $f(2) = \frac{5}{2}$, 则关于 x 的不等式

 $f(\ln x) < \frac{1}{\ln x} + 2$ 的解集为

()

A. $(e^2, +\infty)$ B. $(0, e^2)$ C. $(-\infty, e^2)$ D. $(1, e^2)$

【例3】

$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 已知 $f(x) < f'(x)$, 且 $f(1) = e$, $f(2) = e^3$, 则不等式 $e^2 f(2x-1) - e^{2x+1} > 0$ 的解集为

()

A. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, -\frac{3}{2})$ D. $(-\infty, -1)$

【例 4】

已知 $f(x)$ 是可导的函数, 且 $f'(x) \leq 2f(x)$, 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则下列不等关系正确的是

()

A. $e^2 f(0) > f(1), e^{4040} f(1) > f(2021)$

B. $e^2 f(0) < f(1), e^{4040} f(1) > f(2021)$

C. $e^2 f(0) > f(1), e^{4040} f(1) < f(2021)$

D. $e^2 f(0) < f(1), e^{4040} f(1) < f(2021)$

【例 5】

(2009 天津卷高考真题文科选择压轴难题第 10 题) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$, 且 $2f(x) + xf'(x) > x^2$, 下面的不等式在 $\mathbf{R}$ 内恒成立的是

()

A. $f(x) > 0$

B. $f(x) < 0$

C. $f(x) > x$

D. $f(x) < x$

【例 6】

(2015 新课标 II 卷高考真题理科选择压轴难题第 12 题) 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是

()

A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【例 7】

已知函数 $y = f(x)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f'(x)$ 是其导函数, 恒有 $f'(x) > \tan x \cdot f(x)$, 则

()

A. $f(\frac{\pi}{3}) < \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$

B. $f(\frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}f(\frac{\pi}{6})$

C. $f(\frac{\pi}{6}) < 2\cos 1 \cdot f(1)$

D. $f(\frac{\pi}{3}) > 2\cos 1 \cdot f(1)$



4.1.2.5 【数学思维】导数的原函数构造速解技巧

难度 ★★★

【例1】

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 其导函数 $f'(x) < 4$ 恒成立且 $f(1) = 3$, 则不等式 $f(x) < 4x - 1$ 的解集为

()

A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

【例2】

已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导函数 $f'(x)$, 对任意的实数 x 都有 $f'(x) + 1 < 2x$, $f(m+1) \leq f(-2m) - 3m^2 - m$, 则实数 m 的取值范围是

()

A. $[-\frac{1}{3}, +\infty)$ B. $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-2, +\infty)$

【例3】

定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $x^2 f'(x) + 1 > 0$, $f(2) = \frac{5}{2}$, 则关于 x 的不等式 $f(\ln x) <$

 $\frac{1}{\ln x} + 2$ 的解集为

()

A. $(e^2, +\infty)$ B. $(0, e^2)$ C. $(-\infty, e^2)$ D. $(1, e^2)$

【例4】

$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 已知 $f(x) < f'(x)$, 且 $f(1) = e$, $f(2) = e^3$, 则不等式 $e^2 f(2x-1) - e^{2x+1} > 0$ 的解集为 ()

A. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, -\frac{3}{2})$

D. $(-\infty, -1)$

【例5】

(2015 新课标 II 卷高考真题理科选择压轴难题第 12 题) 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【例6】

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(2) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) > \frac{2}{x} f(x)$, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$



4.1.2.6 【数学思维】隐函数求导

难度 ★★★

菁英专属

【例1】

证明：在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

【例2】

求在曲线 $C: y^2 = 4x$ 上一点 $P(1, 2)$ 的切线方程为_____

【例3】

求双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的图象在点 $M(2\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的切线 l ，则 l 的方程为_____

考点 4.1.3 二次函数基础

【知识梳理】

1. 一元二次不等式的解集

关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 $< 0, \geq 0, \leq 0$) 的解法, 其中设 $a > 0$, 记方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 \leq x_2$.

类 解集	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \leq x_1 \text{ 或 } x \geq x_2\}$	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$
$\Delta = 0$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}, x \in \mathbf{R}\right\}$	$\mathbf{R}$	$\emptyset$	$\left\{x \mid x = -\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta < 0$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$

2. 二次函数根的分布模型

二次函数根的分布情况受判别式、开口、对称轴以及端点值的影响, 因此, 在讨论根的分布时, 这四个因素都要考虑到, 这个过程对分类讨论的能力要求就会很高. 另外, 对于不同形式的根分布问题, 讨论的方式也有所不同, 这就需要我们对基本模型足够熟悉, 可以灵活应对.

3. 二次恒成立模型

二次恒成立问题主要考察学生对函数单调性的认识, 注重对分类讨论能力的培养, 在二次恒成立问题中, 我们不仅要掌握初中学习过的二次函数基本知识, 还要注意对最高次项系数是否为 0 的讨论, 对开口方向的讨论, 以及何时利用判别式, 何时讨论对称轴等一系列问题, 除此之外, 在某些情况下, 我们还可以利用参变分离将二次恒成立问题转化为求函数值域问题进行计算, 从而避免复杂的讨论.

【典型例题】



4.1.3.1 含参二次不等式的分类讨论

难度 ★☆☆

提高专属

【例1】

求关于 x 的一元二次不等式 $x^2 + (m-3)x - 3m > 0$ 的解集.

【例2】

解关于 x 的不等式 $x^2 - (a^2 + 3a + 2)x + 3a(a^2 + 2) < 0 (a \in \mathbf{R})$.

【例3】

已知关于 x 的不等式 $ax^2 - x + 1 - a \leq 0$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 解关于 x 的不等式;

【例4】

求下列关于 x 的不等式的解集: $2a^2x^2 - 3ax - 2 > 0$.

【例 5】

解关于 x 的不等式: $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$.

【例 6】

求不等式 $ax^2 - 5x + 2 < 0$ 的解集 M .



4.1.3.2 二次方程根的分布(基础)

难度 ★☆☆

提高专属

【例1】

已知一元二次方程 $mx^2 - 2x + m + 3 = 0$ 有两个正实根, 则实数 m 的取值范围是_____.

【例2】

关于 x 的方程 $x^2 + (m-2)x + 2m-1 = 0$ 恰有一根属于 $(0, 1)$, 则实数 m 的取值范围是

()

A. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

B. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

C. $[\frac{1}{2}, 2)$

D. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \cup [6-2\sqrt{7}]$

【例3】

若函数 $f(x) = mx^2 - x + m - 1$ 的两个零点一个大于1, 一个小于1, 则实数 m 的取值范围是

()

A. $(0, 1)$

B. $(0, 1]$

C. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

【例4】

已知关于 x 的二次方程 $(2m+1)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ 有一正数根和一负数根，则实数 m 的取值范围是_____.

【例5】

已知方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 有两根，一根在 $(\frac{1}{2}, 1)$ ，而另一根在 $(2, 3)$ ，则实数 a 的取值范围为

()

A. $(-5, -\frac{11}{3})$

B. $(-\frac{11}{3}, -3)$

C. $(-\frac{11}{3}, -2)$

D. $(-\frac{11}{3}, -2) \cup (1, +\infty)$

【例6】

设 $a \in \mathbf{R}$ ，关于 x 的方程 $7x^2 - (a+13)x + a^2 + a - 2 = 0$ 有两实数根 x_1, x_2 ，且 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ ，则实数 a 的取值范围是_____.



4.1.3.3 二次方程根的分布(进阶)

难度 ★☆☆

提高专属

【例1】

已知一元二次方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 的两个不等实根都在区间 $(0, 2)$ 内, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\frac{5}{2}, -2] \cup [2, +\infty)$

B. $(-\frac{5}{2}, -2) \cup (2, +\infty)$

C. $(-\frac{5}{2}, -2]$

D. $(-\frac{5}{2}, -2)$

【例2】

关于 x 的方程 $x^2 + (m-2)x + 6-m = 0$ 的两根都大于 2, 则 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2\sqrt{5}) \cup (2\sqrt{5}, +\infty)$

B. $(-6, -2\sqrt{5}]$

C. $(-6, -2) \cup (2\sqrt{5}, +\infty)$

D. $(-\infty, -2)$

【例3】

若一元二次方程 $mx^2 - (m+1)x + 3 = 0$ 的两实数根都大于 -1, 则 m 的取值范围为 _____.

【例 4】

已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2 + (a+2)x - 4 = 0$, $a \in \mathbf{R}$. 求: 方程至少有一个正根的充要条件.



4.1.3.4 二次恒成立模型

难度 ★☆☆

提高专属

【例 1】

关于 x 的一元二次不等式 $2x^2 - kx + \frac{3}{8} > 0$ 对于一切实数 x 都成立, 则实数 k 满足

()

A. $\{k \mid k < \sqrt{3}\}$

B. $\{k \mid k < -\sqrt{3}\}$

C. $\{k \mid -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}\}$

D. $\{k \mid k > \sqrt{3}\}$

【例2】

不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 \geq 0$ 的解集为 $\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$ B. $(-2, 2)$
C. $(-2, 2]$ D. $(-\infty, 2)$

【例3】

已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + 2$, 若函数 $y = \sqrt{f(x)} + 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围;

【例4】

当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -5)$ B. $(-\infty, -5]$
C. $(-5, +\infty)$ D. $[-5, +\infty)$

考点 4.1.4 导数在研究函数中的应用

【知识梳理】

1. 导数与函数单调性

函数 $y=f(x)$ 在某个区间 (a, b) 内任意一点可导,

如果 $f'(x) > 0$, 则 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 单调递增, (a, b) 为单调递增区间;

如果 $f'(x) < 0$, 则 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 单调递减, (a, b) 为单调递减区间.

2. 导数为含参二次型函数的函数单调性

①判断二项式系数是否为 0

②导数可因式分解: 因式分解后令 $f'(x) = 0$ 得到对应的根, 对比根与定义域得到临界值, 再分段判断单调性;

③导数不可分解因式: 先判断判别式, 有解情况下考虑开口方向、极值点、对称轴、定义域之间的大小求出临界值, 再分段判断单调性

3. 导数为超越函数的函数单调性

既然要求单调区间, 说明超越方程可解, 用特殊值, 如 0, ± 1 , e 等尝试解超越方程, 从而求解原函数的单调区间

4. 已知单调性求参数范围

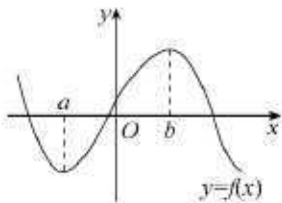
(1) 导数为二次函数型

根据已知函数单调性, 判断导数的正负, 并结合二次函数的性质求解参数范围

(2) 导数为非二次型

根据已知函数单调性, 判断导数的正负, 利用分离参数构造新函数, 将问题转变为函数最值问题

5. 极值与极值点



一般地, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 设 $x_0 \in D$, 如果对于 x_0 附近的任意不同于 x_0 的 x 都有

(1) $f(x) < f(x_0)$, 则 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极大值点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值;

(2) $f(x) > f(x_0)$, 则 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极小值点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值;

极大值点与极小值点都成为极值点, 极大值与极小值都成为极值.

6. 导数与极值

一般地, 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = 0$

- (1) 如果对于 x_0 左侧附近的任意 x 都有 $f'(x) > 0$, 对于 x_0 右侧附近的任意 x 都有 $f'(x) < 0$, 那么此时 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点, $f(x_0)$ 是极大值.
- (2) 如果对于 x_0 左侧附近的任意 x 都有 $f'(x) < 0$, 对于 x_0 右侧附近的任意 x 都有 $f'(x) > 0$, 那么此时 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, $f(x_0)$ 是极小值.
- (3) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧附近与右侧附近均为正号(或者为负号), 则 x_0 一定不是 $y = f(x)$ 的极值点.

7. 求最值的一般思路

- (1) 判断函数单调性, 求出函数所有极值;
- (2) 对比极值与端点函数值, 找到最大值最小值.

【典型例题】



4.1.4.1 不含参函数的单调性

难度 ★☆☆

【例1】

(2016 新课标Ⅲ卷高考真题文科压轴第21题) 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例2】

(2018 新课标Ⅱ卷高考真题文科压轴第21题)已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.

(1)若 $a=3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

【例3】

(2017 天津卷高考真题理科压轴第20题)设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)求 $g(x)$ 的单调区间;

【例 4】

(2021 全国甲卷高考真题理科压轴第 21 题) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

【例 5】

(2019 浙江卷高考真题压轴第 22 题) 已知实数 $a \neq 0$, 设函数 $f(x) = a \ln x + \sqrt{1+x}$, $x > 0$.

(1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;



4.1.4.2a 含参函数单调性讨论之可因式分解型(上)

难度 ★★★

【例1】

(2021 全国甲卷高考真题文科压轴第 20 题) 设函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例2】

(2016 天津卷高考真题理科压轴第 20 题) 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

【例3】

已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - a(x-1) + (a-1)\ln x$, $a > 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;



4.1.4.2b 含参函数单调性讨论之可因式分解型(下)

难度 ★★★

【例1】

已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 6x + 6a \ln x (a \in \mathbf{R})$,

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

【例2】

(2017 新课标Ⅲ卷高考真题文科压轴第21题) 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例3】

已知函数 $f(x) = 2\ln x - (a+1)x^2 - 2ax + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

【例4】

设函数 $f(x) = ax^2 - (a-2)x - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;



4.1.4.3 含参函数单调性讨论之类二次型



【例1】

(2017 新课标 I 卷高考真题理科压轴第 21 题) 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例2】

(2021 新高考 II 卷高考真题压轴第 22 题) 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例3】

设函数 $f(x) = xe^{-x} + \frac{1}{2}ax^2 - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

【例4】

已知函数 $f(x) = a \ln^2 x + 2x(1 - \ln x)$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

【例5】

已知函数 $f(x) = (x - m) \sin x + \cos x$, $x \in [0, \frac{5\pi}{4}]$.

(1) 当 $m \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;



4. 1. 4. 4a 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(上) 难度 ★★★

【例1】

(2021 全国乙卷高考真题文科压轴第 21 题) 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例2】

已知函数 $f(x) = a \ln x + x - \frac{1}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

【例3】

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a\ln x - ax (a > 0)$,

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例4】

(2015 四川卷高考真题理科压轴第 21 题) 已知函数

$f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;



4.1.4.4b 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(下) 难度 ★★★

目标、 菁英专属

【例1】

已知函数 $f(x) = \ln x - ax - \frac{1}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

【例2】

已知函数 $f(x) = \frac{m}{x} - \ln x - mx$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;



4.1.4.5 含参函数单调性讨论之超越函数

★★★

目标、菁英专属

【例1】

(2015 新课标 II 卷高考真题理科压轴第 21 题) 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

【例2】

已知函数 $f(x) = \ln x$.

(1) 当 $g(x) = \sin(1-x)$, 求函数 $T(x) = f(x) + g(x)$ 在 $(0, 1)$ 的单调性;

【例3】

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{4x}{3} - \frac{a}{x^2} + \frac{3}{2}$,

(1) 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性;

【例4】

已知函数 $f(x) = x^2 + \pi \cdot \cos x$.

(1) 判定函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的单调性, 并证明你的结论;

【例4】

(2016 新课标 I 卷高考真题文科压轴难题第 12 题) 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[-1, 1]$

B. $[-1, \frac{1}{3}]$

C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

D. $[-1, -\frac{1}{3}]$

【例5】

若 $f(x) = (a - \frac{1}{2})x - \frac{\sin 2x}{4} + \cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[\frac{5}{4}, +\infty)$

B. $(-\infty, -1]$

C. $(-\infty, \frac{5}{4}]$

D. $[1, +\infty)$

【例6】

函数 $f(x) = x(\ln x - 2)(\ln x + a)$, $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上单调递减, 那么实数 a 的取值集合是_____.

【例 7】

(2011 江西卷高考真题理科第 19 题) 设 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2ax$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上存在单调递增区间, 求 a 的取值范围;



4.1.4.7 已知单调性求参之导数为非二次型

难度 ★★★

目标专属

【例 1】

(2013 大纲版高考真题理科第 9 题) 若函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 是增函数, 则 a 的

取值范围是

()

A. $[-1, 0]$

B. $[-1, +\infty)$

C. $[0, 3]$

D. $[3, +\infty)$

【例2】

若函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - 2$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 2)$ 内存在单调递增区间, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2]$

B. $(-\frac{1}{8}, +\infty)$

C. $(-2, -\frac{1}{8})$

D. $(-2, +\infty)$

【例3】

已知函数 $f(x) = e^x - a \ln(x+1) - 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, e 是自然对数的底数.

(1) 若 $f(x)$ 单调递增, 求 a 的取值范围;

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.693$, $e \approx 2.718$)

【例 4】

设函数 $f(x) = (x+1)\ln x + ax + b$, 若 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的单调函数, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

C. $(-2, +\infty)$

D. $[-2, +\infty)$

【例 5】

已知函数 $f(x) = e^x - x + a\cos x$.

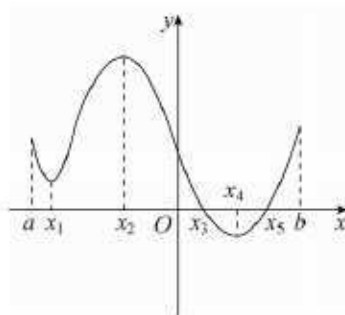
(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;



4.1.4.8 极值与极值点

难度 ★★★

【例1】

 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()


- A. $f(x)$ 的极小值点为 x_1, x_2
- B. $f(x)$ 的极大值点为 x_2
- C. $f'(x)$ 有唯一的极小值点
- D. 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上的极值点的个数为 2

【例2】

 已知函数 $f(x)$ 在定义域 D 内导数存在, 且 $x_0 \in D$, 则 “ $f'(x_0) = 0$ ” 是 “ x_0 是 $f(x)$ 的极值点” 的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【例3】

已知函数 $f(x) = 2xe^x$ ，则函数的极小值为 ()

A. $-\frac{1}{e}$

B. $-e$

C. $-\frac{2}{e}$

D. $-2e$

【例4】

(2021 全国乙卷高考真题理科第 10 题) 设 $a \neq 0$ ，若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则 ()

A. $a < b$

B. $a > b$

C. $ab < a^2$

D. $ab > a^2$

【例5】

函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$ ，解析式 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ ，则下列结论中正确的是 ()

A. 函数 $y = f(x)$ 既有最小值也有最大值

B. 函数 $y = f(x)$ 有最小值但没有最大值

C. 函数 $y = f(x)$ 恰有一个极小值点

D. 函数 $y = f(x)$ 恰有两个极大值点

【例6】

(2008 湖北卷高考真题文科第 17 题) 已知函数 $f(x) = x^3 + mx^2 - m^2x + 1$ (m 为常数, 且 $m > 0$) 有极大值 9.

(1) 求 m 的值;



4.1.4.9 最值与值域之具体函数

★★★

【例1】

函数 $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ 在 $x \in [0, 3]$ 上的最大值为 ()

A. -5

B. -3

C. 2

D. 5

【例2】

(2014 北京卷高考真题文科第 20 题) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最大值;

(Ⅱ) 若过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 t 的取值范围;

(Ⅲ) 问过点 $A(-1, 2)$, $B(2, 10)$, $C(0, 2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切? (只需写出结论)

【例3】

(2018 新课标 I 卷高考真题理科压轴难题第 16 题) 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

【例4】

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, 求该函数值域

【例 5】

(2017 浙江卷高考真题第 20 题) 已知函数 $f(x) = (x - \sqrt{2x-1})e^{-x} (x \geq \frac{1}{2})$.

(1) 求 $f(x)$ 的导函数;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上的取值范围.



4.1.4.10 最值讨论与值域之含参函数

难度 ★★★

提高专属

【例 1】

(2019 新课标Ⅲ卷高考真题理科第 20 题) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$.

(2) 是否存在 a, b , 使得 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1 ? 若存在, 求出 a, b 的所有值; 若不存在, 说明理由.

【例2】

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - \frac{1}{2}ax^2$ ($a \in \mathbf{R}$).

(Ⅱ)求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值.

【例3】

已知函数 $f(x) = \ln x + x + a - axe^x$, $a > 0$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最值;

专题 4.2 一元函数的导数及其应用的综合提升

考点 4.2.1 恒成立问题之已知恒成立求参数范围

【知识梳理】

1. 导数可因式分解型

- (1) 移项，构造新函数
- (2) 求导，因式分解，对参数进行分类讨论判断单调性
- (3) 根据恒成立条件求参数范围

2. 洛必达法则

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;
- (2) 在点 x_0 的某去心邻域内两者都可导，且 $g'(x) \neq 0$;

- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 可为实数，也可为 $\pm\infty$)，则

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;
- (2) 在点 x_0 的某去心邻域内两者都可导，且 $g'(x) \neq 0$;

- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 可为实数，也可为 $\pm\infty$)，则

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. 参变分离法

将参数与变量分离开，得到一个不含参数的新函数，将恒成立问题转化为求不含参函数的最值问题。

4. 双独立变量问题

- (1) 双变量单函数：构造新函数，转化为新函数的单调性问题
- (2) 双变量双函数：通过对逻辑连接词及目标不等式的分析，转化为最值问题

5. 双逻辑连接词

$\forall x_1$	$\forall x_2$	$f(x_1) \geq g(x_2)$	$f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$
$\forall x_1$	$\exists x_2$	$f(x_1) \geq g(x_2)$	$f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$
$\exists x_1$	$\forall x_2$	$f(x_1) \geq g(x_2)$	$f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max}$
$\exists x_1$	$\exists x_2$	$f(x_1) \geq g(x_2)$	$f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min}$

【典型例题】



4.2.1.1 导数可因式分解型分类讨论

难度 ★★★

提高专属

【例1】

(2015 新课标 II 卷高考真题文科第 21 题) 设函数 $f(x) = \ln x + a(1-x)$.

(I) 讨论: $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $f(x)$ 有最大值, 且最大值大于 $2a-2$ 时, 求 a 的取值范围.

【例 2】

(2017 新课标 I 卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

【例 3】

(2014 新课标 I 卷高考真题文科第 21 题) 设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - bx$ ($a \neq 1$), 曲线 $y = f(x)$

在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0,

(1) 求 b ;

(2) 若存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$, 求 a 的取值范围.



4.2.1.2 参变分离法

难度 ★★★

【例1】

(2020 新课标 II 卷高考真题文科第 21 题) 已知函数 $f(x) = 2\ln x + 1$.

(1) 若 $f(x) \leq 2x + e$, 求 e 的取值范围;

【例2】

(2013 华侨、港澳、台联考高考 22 题) 设函数 $f(x) = 2e^x(x-1) - ax^2$.

(I) 若对任意 $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围;

【例 3】

(2010 全国统一高考真题理科第 20 题) 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

(1) 若 $xf'(x) \leq x^2 + ax + 1$, 求 a 的取值范围;

【例 4】

(2014 辽宁高考真题文科压轴第 12 题) 当 $x \in [-2, 1]$ 时, 不等式 $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-5, -3]$

B. $[-6, -\frac{9}{8}]$

C. $[-6, -2]$

D. $[-4, -3]$



4.2.1.3 洛必达法则

难度 ★★★

菁英专属

【例1】

求以下函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} =$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} =$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x =$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2} =$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - 1} =$$

【例 2】

(2010 新课标卷高考真题文科第 21 题) 设函数 $f(x) = x(e^x - 1) - ax^2$.

(Ⅱ) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

【例 3】

(2014 北京市高考真题理科第 18 题) 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(1) 求证: $f(x) \leq 0$;

(2) 若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 求 a 的最大值与 b 的最小值.



4.2.1.4 双逻辑连接词的函数问题之单函数单调性构造

难度 ★★★

目标、菁英专属

【例1】

若对任意的 $x_1, x_2 \in (m, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < 3$, 则实数 m 的最小值是

()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. e

D. $\frac{1}{e}$

【例2】

(2020 新课标 II 卷高考真题文科压轴第 12 题) 若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则 ()

A. $\ln(y-x+1) > 0$

B. $\ln(y-x+1) < 0$

C. $\ln|x-y| > 0$

D. $\ln|x-y| < 0$

【例 3】

(2014 陕西省高考真题文科第 23 题) 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}$, $m \in \mathbf{R}$.

(Ⅲ) 若对任意 $b > a > 0$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

【例 4】

当 $0 < x_1 < x_2 < m$ 时, 不等式 $x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$ 恒成立, 则实数 m 的最大值为 ()

- A. 1 B. e C. $\frac{1}{e}$ D. $\sqrt{e}$

【例 5】

若对任意的 $x_1, x_2 \in (m, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_2 - x_1} < 3$ 成立, 则 m 的最小值是

- ()
A. 1 B. e C. e^{-2} D. $3e^{-2}$



4.2.1.5 双逻辑连接词的函数问题之双函数最值构造

★★★

菁英专属

【例1】

已知函数 $f(x) = x^2 - ex + a (x \in [1, e])$, $g(x) = \frac{\ln x}{x} (x \in [1, e])$, 记 $f(x)$ 的最大最小值分别为 $f_{\max}, f_{\min}$, 值域为 F ; 记 $g(x)$ 的最大最小值分别为 $g_{\max}, g_{\min}$, 值域为 G .

(1) 请写出 $f_{\max}, f_{\min}$ 和 $g_{\max}, g_{\min}$;

(2) 请用以上符号之间的关系转化以下命题, 并求满足该命题的参数 a 的范围:

① 若对于任意 $x_1 \in [1, e]$, 任意 $x_2 \in [1, e]$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立.

② 若对于任意 $x_1 \in [1, e]$, 存在 $x_2 \in [1, e]$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立.

③ 若存在 $x_1 \in [1, e]$, 对于任意 $x_2 \in [1, e]$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立.

④ 若存在 $x_1 \in [1, e]$, 存在 $x_2 \in [1, e]$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立.

⑤ 若对任意 $x_1 \in [1, e]$, 存在 $x_2 \in [1, e]$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立.

【例 2】

已知函数 $f(x) = (a+1)\ln x + ax^2 + 1$.

- (2) 设 $g(x) = -x^2 + 2bx + 3$, 当 $a = -\frac{1}{3}$ 时, 若对任意 $x_1 \in (0, +\infty)$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 求实数 b 取值范围.

【例 3】

对任意 $a \in \mathbf{R}$, 存在 $b \in (0, +\infty)$, 使得 $e^a - \ln b = 1$, 则 $b - a$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{e}}{2}$

C. 1

D. e

考点 4.2.2 恒成立问题之证明不等式

【知识梳理】

1. 主元法

即变换主元, 将参数视为主元, 然后通过明显的单调性将函数放缩为无参函数, 再证明不等式恒成立.

2. 常用函数放缩

(1) $e^x \geq x+1$, 当且仅当 $x=0$ 时取等;

$e^x \geq ex$, 当且仅当 $x=1$ 时取等;

(2) $\ln x \leq x-1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等;

$\ln x \leq \frac{1}{e}x$, 当且仅当 $x=e$ 时取等;

(3) $\sin x \leq x \leq \tan x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$;

(4) $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

3. 分离函数法

在近些年的高考题中, 含 $\ln x$ 和 e^x 的不等式频繁出现, 若直接对函数求导, 很多问题需要多次求导、多次讨论, 甚至无法解决, 若转变思路, 将复杂函数分离成两个简单函数进行研究, 便能化繁为简, 解决问题.

【典型例题】



4.2.2.1 主元法

难度 ★★★★★

菁英专属

【例 1】

(2018 新课标 I 卷高考真题第 21 题) 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;(2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

【例 2】

(2006 四川卷高考真题第 22 题) 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + a \ln x (x > 0)$, $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$.对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 , 证明:(1) 当 $a \leq 0$ 时, $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$;

【例3】

(2022 北京卷高考真题第20题) 已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;

(III) 证明: 对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.



4.2.2.2 常用函数放缩

难度 ★★★

菁英专属

【例 1】

证明以下不等式：

(1) $e^x \geq x + 1$

(2) $\ln x \leq x - 1$

(3) $\sin x \leq x \leq \tan x \quad (\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}))$

【例2】

已知函数 $f(x) = e^x - \ln x + 1$.

(2) 证明: $f(x) > 3$.

【例3】

(2013 新课标 II 卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$.

(II) 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > 0$.

【例4】

(2016 山东省高考真题理科第 20 题) 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

(II) 当 $a=1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 成立.



4.2.2.3 分离函数法

难度 ★★★★★

精英专属

【例 1】

$$(1) \frac{e^x}{x} \geq x (x > 0)$$

$$(2) \frac{2\ln x}{1-x^2} + \frac{1}{x} > 0$$

【例 2】

(2016 新课标 II 卷高考真题理科第 21 题)(I) 讨论函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性, 并证明当 $x > 0$

时, $(x-2)e^x + x + 2 > 0$;

【例3】

(2011 新课标卷高考真题文科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x+1} + \frac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 证明: 当 $x>0$, 且 $x \neq 1$ 时, $f(x) > \frac{\ln x}{x-1}$.

【例4】

(2014 新课标 I 卷高考真题理科第 21 题) 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处得切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

(I) 求 a, b ;

(II) 证明: $f(x) > 1$.

考点 4.2.3 根与方程问题之根与零点问题

【知识梳理】

1. 函数的零点

函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数根，也就是函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标.

2. 零点存在性定理

一般的，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么，函数在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c) = 0$ ，这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根.

3. 常规方法

(1) 参变分离法：将参数与变量分离开，零点问题就转化为交点问题，接下来研究函数的单调性和值域问题即可.

(2) 分类讨论：按区间分段讨论，在每个区间利用零点存在性定理判断零点个数，最终得到整个定义域内的零点个数.

【典型例题】



4.2.3.1a 参变分离法(上)

难度 ★★★★★

提高专属

【引入】

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ -x^2 - 4x - 3, & x \leq 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) + m$ 有 3 个零点，则 m 的取值范围是

_____.



4.2.3.1b 参变分离法(下)

难度 ★★★★★

提高专属

【例1】

(2018 新课标 II 卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

【例2】

(2018 新课标 II 卷高考真题文科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.(1) 若 $a=3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

【例3】

(2021 甲卷高考真题理科第 21 题) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.



4.2.3.2 导数可因式分解型分类讨论(上)(下)

难度 ★★★★★

提高专属

【例1】

(2021 甲卷高考真题第 20 题) 设函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

【例 2】

(2020 新课标Ⅲ卷高考真题第 20 题) 已知函数 $f(x) = x^3 - kx + k^2$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

【例 3】

(2017 新课标Ⅰ卷高考真题第 21 题) 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

【例4】

(2022 乙卷高考真题第 20 题) 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$.

- (1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;
- (2) 若 $f(x)$ 恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

考点 4.2.4 根与方程问题之双零点问题

【知识梳理】

1. 极值点偏移的经典模型

二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的极值点 $x_0 = -\frac{b}{2a}$, 作 $y = t$ 与函数 $f(x)$ 的图像交于点

$A(x_1, t)$ 和 $B(x_2, t)$, 此时 AB 的中点横坐标 $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$, 极值点没有发生偏移. 而通常情

况下, 我们所遇到的大多数函数都不具有这样的对称性, 那么 AB 中点的横坐标与 x_0 不相等, 此时我们认为极值点发生了偏移.

极值点(零点)偏移的经典题设一般为: 函数 $f(x)$ 在定义域内存在两个不相等的零点 x_1, x_2 , 求证 $x_1 + x_2 > 2x_0$ (x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点, 不等号可变)

2. 双变量换元构造

极值点偏移也可以看作是双变量不等式, 因此可以通过换元来使不等式变为单变量不等式.

【典型例题】

4.2.4.1a 极值点偏移模型(上) 难度 ★★★★★ 目标、菁英专属

【例1】

(2010 天津卷高考真题第 21 题) 已知函数 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbf{R})$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(II) 已知函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 证明: 当 $x > 1$ 时,

$$f(x) > g(x);$$

(III) 如果 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

【例 2】

(2016 新课标 1 卷高考真题第 21 题) 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点.

(I) 求 a 的取值范围;

(II) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$.



4.2.4.1b 极值点偏移模型(下)

难度 ★★★★★

精英专属

【例 1】

已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a-1)x$ ($a \in \mathbf{R}$) 有两个不同的零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 > 2a$.

【例2】

已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = e^x - ax$ 的两个零点, 且 $x_1 < x_2$

- (1) 求 a 的取值范围
- (2) 证明: $x_1 + x_2 < 2\ln a$
- (3) 证明: $x_1 + x_2 > 2$
- (4) 证明: $x_1 + 2x_2 > 3$
- (5) 证明: $e^{x_1} + e^{x_2} > 2a$
- (6) 证明: $e^{x_1} + e^{x_2} > 2e$
- (7) 证明: $x_1 \cdot x_2 < 1$



4.2.4.2 双变量的换元构造

★★★★

菁英专属

【例1】

设 $f(x) = x - ae^x$ ($a \in \mathbf{R}$), $x \in \mathbf{R}$, 已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

- (1) 求 a, x_1, x_2 的取值范围;
- (2) 若 $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$, 求出 a 的取值范围;
- (3) 若 $x_2 - x_1 \geq \ln 2$, 求出 a 的取值范围;
- (4) 证明: $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

考点 4.2.5 根与方程问题之极值点问题

【知识梳理】

1. 极值点问题常规解题步骤

- (1) 判断函数单调性, 求出极值点
- (2) 由于极值点为导函数的零点, 因此可以得到关于极值点的等式
- (3) 将极值点代入目标(不)等式, 化简后, 利用所得极值点的关系, 通过换元、放缩、基本不等式等方法证明成立

2. 方程消参

核心思想: 虚设 $f'(x) = 0$ 的根为 x_0 , 即 $f'(x_0) = 0$, 再反向代入 $f(x_0)$ 化简

【典型例题】



4.2.5.1 单极值点问题

难度 ★★★

目标、菁英专属

【例 1】

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$ 的极值点为 x_0 , 则 $e^{\frac{1}{x_0}} \ln x_0 =$ ()

- A. e^2 B. 2 C. $\frac{1}{e}$ D. 1

【例 2】

(2024 年新高考 II 卷高考真题第 16 题) 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^2$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
 (2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.

【例 3】

设函数 $f(x) = x^2 + a \ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

(I) 求 a 的取值范围, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 证明: $f(x_2) > \frac{1-2\ln 2}{4}$.



4.2.5.2 双极值点问题

难度 ★★★★★

菁英专属

【例1】

(2007年海南/宁夏理科高考真题压轴难题第21题) 设函数 $f(x) = \ln(x+a) + x^2$ (I) 若当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极值, 求 a 的值, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;(II) 若 $f(x)$ 存在极值, 求 a 的取值范围, 并证明所有极值之和大于 $\ln \frac{e}{2}$.

【例2】

若 $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - bx + 2a \ln x$.(II) 若 $b=0$, 且 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 .① 求实数 a 的取值范围;② 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 1$.

【例 3】

(2018 新课标 I 卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

考点 4.2.6 导数拔高拓展

【典型例题】



4.2.6.1 导数多选题与应试思维综合运用

难度 ★★★

【例1】

(多选)(2022 新高考 I 卷高考真题多选第 10 题) 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则 ()

- A. $f(x)$ 有两个极值点
 B. $f(x)$ 有三个零点
 C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
 D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【例2】

(多选)(2024 新高考 I 卷高考真题多选第 10 题) 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, 则 ()

- A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点
 B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(x^2)$
 C. 当 $1 < x < 2$ 时, $-4 < f(2x-1) < 0$
 D. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$

【例3】

(多选)(2023 新高考 II 卷高考真题多选第 11 题) 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a \neq 0$) 既有极大值也有极小值, 则 ()

- A. $bc > 0$
 B. $ab > 0$
 C. $b^2 + 8ac > 0$
 D. $ac < 0$

【例 4】

(多选)(2025 新高考 II 卷高考真题多选第 10 题)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则 ()

- A. $f(0) = 0$
- B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$
- C. $f(x) \geq 2$, 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$
- D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

【例 5】

(多选)已知 $f(x) = (x - 1)e^x - x^2$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递增
- B. 函数 $f(x)$ 有 1 个零点
- C. 对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1 + x_2}{2})$
- D. 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 在区间 $[0, 2)$ 上有且只有一个零点, 则 $m \in [-1, e^2 - 4]$



4.2.6.2 【数学思维】求和型放缩(上)

难度 ★★★★★

菁英专属

【例1】

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x+2}$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及最值;
- (2) 若对 $\forall x > 0$, $f(x) + g(x) > 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
- (3) 求证: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < \ln(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^+$).

【例2】

已知函数 $f(x) = a \ln x - ax + 1$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求证: $\frac{\ln 2}{2} \times \frac{\ln 3}{3} \times \frac{\ln 4}{4} \times \cdots \times \frac{\ln n}{n} < \frac{1}{n}$ ($n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*$).

【例3】

(2022 新高考 II 卷高考真题第 22 题) 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.



4.2.6.3 【数学思维】求和型放缩(下)

难度 ★★★★★

菁英专属

【例4】

(2017 新课标 III 卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$,

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的值;

(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n , $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2}) \cdots (1 + \frac{1}{2^n}) < m$, 求 m 的最小值.

【例 5】

(2020 新课标 II 卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 的单调性;

(2) 证明: $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^+$, 证明: $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^{n-1} x \leq \frac{3^n}{4^n}$.

选择性必修三



专题 5.1 计数原理

考点 5.1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

【知识梳理】

1. 分类加法计数原理

做一件事，完成他有 n 类方法，在第 1 类方法中又有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

做一件事，完成他需要分成 n 个步骤，完成第 1 个步骤有 m_1 种不同的方法，完成第 2 个步骤有 m_2 种不同的方法，……，完成第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法.

3. 容斥原理

容斥原理是在计数时，为了使重叠部分不被重复计算而研究出的一种计数方法. 这种方法的基本思想是：先不考虑是否重复计算而把所有类目的数量相加，然后再把计数时重复计算的数量排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复.

两个集合的容斥原理： $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

三个集合的容斥原理：

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

【典型例题】

5.1.1.1 枚举法及规律性枚举 难度 ★☆☆

枚举法

【例1】

(2020年上海市春季高考数学试卷第10题)已知 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $a, b \in A$, 则 $|a| < |b|$ 的情况有 _____ 种.

【例2】

掷四个相同的骰子, 点数和为14, 如果不考虑顺序, 会有多少种不同的可能? (例如: 2, 2, 3, 5 和 3, 2, 5, 2 视为同一种情况.)

【例3】

(1999年全国卷高考真题理科第16题)在一块并排10垄的田地中, 选择2垄分别种植A、B两种作物, 每种作物种植一垄, 为有利于作物生长, 要求A、B两种作物的间隔不小于6垄, 则不同的选垄方法共有 _____ 种(用数字作答).

规律性枚举

【例 4】

从 1 ~ 10 中选出 3 个数，使得任意两个数之差至少为 3，有几种选法？

【例 5】

从 1 ~ 20 中选出 3 个数，使得任意两个数之差至少为 3，有几种选法？

【例 6】

(2017 清华大学领军计划自主招生选拔测试真题) 已知 x, y, z 非负整数，满足 $x + 2y + 3z = 100$ 的有 _____ 种



5.1.1.2 加法原理和乘法原理的应用

难度 ★★★

【例1】

某单位职工姓李的共有18人,姓张的共有12人,姓赵的共有5人,姓刘的共有3人.

(1)从中任选1人去组织活动,有多少种不同的选法?

(2)从四种姓氏的人中各选1人去组织活动,有多少种不同的选法?

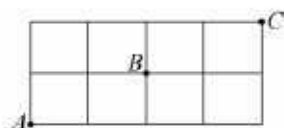
【例2】

设4名学生报名参加同一时间安排的3项课外活动方案有 a 种,这4名学生在运动会上共同争夺100米、跳远、铅球3项比赛的冠军的可能结果有 b 种,则 (a, b) 为 ()

A. $(3^4, 3^4)$ B. $(4^3, 3^4)$ C. $(3^4, 4^3)$ D. $(4^3, 4^3)$

【例3】

某小区的道路网如图所示，则由 A 到 C 的最短路径中，经过 B 的走法有 ()



A. 6 种

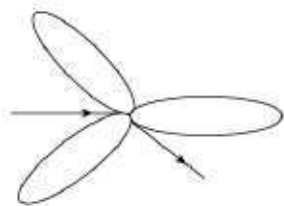
B. 8 种

C. 9 种

D. 10 种

【例4】

一植物园参观路径如图所示，若要全部参观并且路线不重复，则不同的参观路线种数共有 ()



A. 6

B. 8

C. 36

D. 48

【例5】

已知集合 $M = \{1, -2, 3\}$, $N = \{-4, 5, 6, -7\}$, 从两个集合中各选一个数作为点的坐标, 则这样的坐标在直角坐标系中可表示第三、四象限内多少个不同点 ()

- A. 18 个 B. 10 个 C. 16 个 D. 14 个

【例6】

乘积 $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$ 展开后共有 _____ 项.



5.1.1.3 计数原理的简单应用与综合运用

难度 ★★☆☆

提高专属

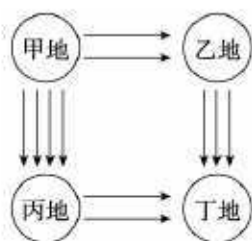
【例1】

端午节吃粽子是我国的传统习俗. 现有一盘中装有 6 个粽子, 其中 4 个不同的蛋黄粽, 2 个不同的豆沙粽. 若从蛋黄粽和豆沙粽中各取 1 个, 则不同的取法种数为 ()

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

【例2】

如图，从甲地到乙地有2条路，从乙地到丁地有3条路；从甲地到丙地有4条路，从丙地到丁地有2条路。从甲地到丁地共有多少条不同的路线 ()



A. 6

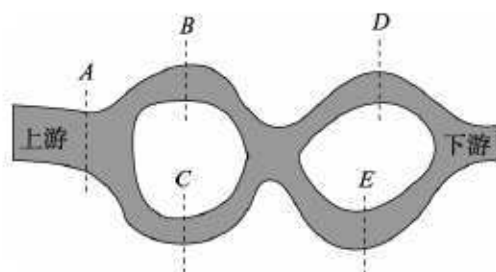
B. 8

C. 11

D. 14

【例3】

如图所示是一段灌溉用的水渠，上游和下游之间建有A, B, C, D, E五个水闸，若上游有充足水源但下游没有水，则这五个水闸打开或关闭的情况有 ()



A. 7种

B. 15种

C. 23种

D. 26种

【例4】

1800 的正约数的个数为

()

A. 18

B. 28

C. 36

D. 46

【例5】

对于直线 $y = k(x + b)$, 若 k 与 b 均在集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 内取值, 则不同的直线条数为_____.

【例6】

(多选) 以下结论正确的是

()

A. 3 个班分别从 4 个景点中选择一处游览, 不同选法的种数是 4^3 B. 从 4 本不同书中选出 3 本送给 3 名同学, 每人一本, 有 4^3 种不同的送法

C. 60 有 12 个不同的正因数

D. 从 2, 4, 8, 14 这四个数中任取两个数相减, 可以得到 12 个不相等的差



5.1.1.4 多子集个数速算技巧

难度 ★★★

【例1】

若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则称 (A_1, A_2) 为集合 A 的一个分拆, 并规定: 当且仅当 $A_1 = A_2$ 时, (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 A 的同一种分拆, 则集合 $A = \{a_1, a_2\}$ 的不同分拆种数是

()

A. 8

B. 9

C. 16

D. 18

【例2】

已知集合 A, B 的并集 $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3\}$, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 与 (B, A) 视为不同的对, 则这样的 (A, B) 对的个数为_____.

【例3】

$A \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, 有序集合对 (A, B) 代表: 当 A, B 不同时, 满足题意的集合对 (A, B) 与 (B, A) 记为两个不同的集合对, 则这样的有序集合对共有_____个.

【例4】

(2008 年南京大学自主招生选拔测试) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, 有序集合对 (A, B, C) 共有_____个.

【例5】

设集合 A, B 是非空集合 M 的两个不同子集.

- (1) 若 $M = \{a_1, a_2\}$, 且 A 是 B 的子集, 求所有有序集合对 (A, B) 的个数;
- (2) 若 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 且 A 是 B 的子集, 求所有有序集合对 (A, B) 的个数.

【例6】

集合 A, B 满足条件 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 当 $A \neq B$ 时, 我们将 (A, B) 与 (B, A) 视为两个不同的集合对, 则满足条件的集合对 (A, B) 共有_____个.

考点 5.1.2 排列与组合

【知识梳理】

1. 排列

- (1) 从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素排成一列, 称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列, 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列数, 用符号 A_n^m 表示,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

- (2) n 个不同的元素全部取出的一个排列, 叫做 n 个元素的一个全排列, 这时公式 $m = n$, 即有

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

所以正整数 1 到 n 的连乘积, 叫做 n 的阶乘, 用 $n!$ 表示, 规定 $0! = 1$

- (3) 排列数公式用阶乘可以表示为:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

2. 组合

- (1) 从 n 个不同的元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有不同组合的个数叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数, 用 C_n^m 符号表示

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- (2) 组合数的性质

$$\textcircled{1} C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$\textcircled{2} C_n^{n-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$$

【典型例题】



5.1.2.1 排列数、组合数的概念与综合计算

难度 ★☆☆☆

【例1】

请用乘法原理列式:

- (1) 将甲乙丙等六个人排成一列, 共有_____种排法.
- (2) 将甲乙丙等六个人中选出三人排成一列, 共有_____种排法.

【例2】

请填空并记住这些常用的排列数:

$$2! = \underline{\hspace{2cm}} \quad 3! = \underline{\hspace{2cm}} \quad 4! = \underline{\hspace{2cm}} \quad 5! = \underline{\hspace{2cm}} \quad 6! = \underline{\hspace{2cm}}$$

【例3】

请用乘法原理列式:

- (1) 将甲乙丙三人排成一列, 共有_____种排法.
- (2) 从甲乙丙等五人中选出三人排成一列, 共有_____种排法.
- (3) 从甲乙丙等五人中选出两人(不计顺序), 共有_____种选法.
- (4) 从甲乙丙等五人中选出三人(不计顺序), 共有_____种选法.

【例4】

请计算以下常见组合数:

$$C_5^2 = \underline{\hspace{2cm}}; C_5^3 = \underline{\hspace{2cm}}; C_6^2 = \underline{\hspace{2cm}}; C_6^3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$C_6^4 = \underline{\hspace{2cm}}; C_8^3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

【例5】

计算:

$$(1) C_9^2 =$$

$$(2) \frac{C_{12}^7}{C_{12}^5} =$$

【例6】

- ①从1~10中选出3个数,使得任意两个数之差至少为3,有几种选法?
②从1~20中选出3个数,使得任意两个数之差至少为3,有几种选法?

【例7】

(2020年新高考上海卷高考真题第9题)从6个人挑选4个人去值班,每人值班一天,第一天安排1个人,第二天安排1个人,第三天安排2个人,则共有_____种安排情况.



5.1.2.2 特元特位

例解 ★★★

【例1】

- (1) 甲乙丙等六个人排队照相，要求甲站在左起第二个，且乙站在左起第四个，共有多少种排法？
- (2) 甲乙丙等六个人排队照相，要求甲站在左起第二个，且乙不站在左起第四个，共有多少种排法？
- (3) 甲乙丙等六个人排队照相，要求甲站在左起第二个，且乙不站在左端，丙站在右端，共有多少种排法？
- (4) 甲乙丙等六个人排队照相，要求甲站在左起第二个，且乙不站在左端，丙不站在左右两端，共有多少种排法？

【例2】

学校准备在周二上午第1、2、3、4节举行化学、生物、政治、地理共4科选考科目讲座,要求生物不能排在第1节,政治不能排在第4节,则不同的安排方案的种数为 ()

- A. 12 B. 14 C. 20 D. 24

【例3】

某校开展“迎奥运阳光体育”活动,共设踢毽、跳绳、拔河、推火车、多人多足五个集体比赛项目,各比赛项目逐一进行,为了增强比赛的趣味性,在安排比赛顺序时,多人多足不排在第一场,拔河排在最后一场,则不同的安排方案种数为 ()

- A. 3 B. 18 C. 21 D. 24

【例4】

(2006年全国I卷高考真题理科第15题)安排7位工作人员在5月1日至5月7日值班,每人值班一天,其中甲、乙二人都不安排在5月1日和2日,不同的安排方法共有_____种(用数字作答).



5.1.2.3 相邻捆绑

难度 ★★★

【例1】

对1、2、3、4、5、6六个数字进行排序，要求2和3必须相邻，5不在最右，共有多少种排法？

【例2】

中国航天工业迅速发展，取得了辉煌的成就，使我国跻身世界航天大国的行列。中国的目标是到2030年成为主要的太空大国。它通过访问月球，发射火星探测器以及建造自己的空间站，扩大了太空计划。在航天员进行的一项太空实验中，要先后实施6个程序，其中程序A只能出现在第一步或最后一步，程序B和C实施时必须相邻，请问实验顺序的编排方法共有

()

A. 24种

B. 48种

C. 96种

D. 144种

【例3】

(1990年全国卷高考真题第13题)A, B, C, D, E五人并排站成一排，如果A, B必须相邻且B在A的右边，那么不同的排法共有

()

A. 60种

B. 48种

C. 36种

D. 24种

【例4】

(2007年北京卷理科高考真题第5题)记者要为5名志愿者和他们帮助的2位老人拍照,要求排成一排,2位老人相邻但不排在两端,不同的排法共有 ()

- A. 1440种 B. 960种 C. 720种 D. 480种

【例5】

现有7人排队接种新冠疫苗,若要求甲在乙的前面,乙在丙的前面,且丙丁相邻,则有_____种不同的排队方法.(用数字作答)

【例6】

某小区有排成一排的7个车位,求满足下列条件的停车方法数:

- (1)现有3辆不同的车需要停放,要求3辆车连在一起,有_____种方法;
 (2)现有4辆不同的车需要停放,要求剩余的3个车位连在一起,有_____种方法.



5.1.2.4 插空法模型

难度 ★★★

【例1】

将4个 a 和2个 b 随机排成一行,则2个 b 不相邻的排法种数为 ()

A. 10

B. 15

C. 20

D. 24

【例2】

随着北京冬残奥会的开幕,吉祥物“雪容融”火遍国内外,现有3个完全相同的“雪容融”,甲、乙、丙3位运动员要与这3个“雪容融”站成一排拍照留念,则有且只有2个“雪容融”相邻的排队方法为_____. (用数字作答)

【例3】

“仁义礼智信”儒家“五常”,由伟大的教育家孔子提出,现将“仁义礼智信”排成一排,则“礼智”互不相邻的排法总数为_____.

【例4】

有7人站成一排照相,要求A,B两人相邻,C,D,E三人互不相邻,则不同的排法种数为_____.

【例5】

(2014年辽宁卷理科高考真题第6题)6把椅子排成一排,3人随机就座,任何两人不相邻的坐法种数为 ()

- A. 144 B. 120 C. 72 D. 24

【例6】

6张同排连号的电影票,分给3名教师与3名学生,若要求师生相间而坐(教师之间不相邻,学生之间也不相邻),则不同的坐法种数是 ()

- A. 36 B. 72 C. 120 D. 720

【例7】

(2014重庆卷高考真题理科第9题)某次联欢会要安排3个歌舞类节目,2个小品类节目和1个相声类节目的演出顺序,则同类节目不相邻的排法种数是 ()

- A. 72 B. 120 C. 144 D. 168



5.1.2.5 分组分配模型(上)(下)

难度 ★★★

【例1】

现有 6 本不同的书，做如下分组或者分配，各有多少种分法？

分组与分配方式			
	甲 2, 乙 2, 丙 2	分成 2, 2, 2 三组	2, 2, 2 本分给甲 乙丙三人
	甲 1, 乙 2, 丙 3	分成 1, 2, 3 三组	1, 2, 3 本分给甲 乙丙三人
	甲 2, 乙 2, 丙 1, 丁 1	分成 2, 2, 1, 1 四组	2, 2, 1, 1 本分给 甲乙丙丁

【例2】

- (1) 将6名学生分成两组, 一组2人, 一组4人, 则不同的分组数是_____.
- (2) 将6名学生平均分成两组, 则不同的分组数是_____.
- (3) 将6名学生进行分组, 分给甲组2人, 乙组4人, 则不同的分组数是_____.
- (4) 将6名学生进行分组, 一组2人, 一组4人, 将这两组分配给甲乙小组, 则不同的分组数是_____.
- (5) 将6名学生平均分成三组, 将这三组分配给甲乙丙小组, 则不同的分组数是_____.

【例3】

10名同学分两组, 一组7人, 一组3人, 不同的分法有多少种?

【例4】

某校 9 人入选 3 人篮球赛，若训练时分为三组，每组 3 人，则不同的分法种数有

()

A. 280

B. 1680

C. 10080

D. $9!$ **【例5】**

6 本不同的书分成 3 组，一组 4 本，其余组各 1 本，共有不同的分法

()

A. 5 种

B. 10 种

C. 15 种

D. 20 种

【例6】

6 个人分成甲、乙两组，甲组 2 人，乙组 4 人，则不同的分组种数为

()

A. 10 种

B. 15 种

C. 30 种

D. 225 种

【例7】

新冠肺炎疫情防控期间，7 名医学大学生志愿者到 A 、 B 、 C 三个社区参加疫情联防联控工作，根据工作需要， A 社区要分配三名志愿者， B 、 C 两个社区各 2 名志愿者，则不同的分配方法共有

()

A. 210 种

B. 240 种

C. 420 种

D. 480 种

【例8】

3名大学生利用假期到2个山村参加扶贫工作,每名大学生只去1个村,每个村至少1人,则不同的分配方案共有 ()

- A. 4种 B. 5种 C. 6种 D. 8种

【例9】

某班有50人,从中选10人均分2组(即每组5人),一组打扫教室,一组打扫操场,那么不同的选派法有 ()

- A. $C_{50}^{10} \cdot C_{10}^5$ B. $\frac{C_{50}^{10} \cdot C_{10}^5}{2}$
C. $C_{50}^{10} \cdot C_{10}^5 \cdot A_2^2$ D. $C_{50}^5 \cdot C_{45}^5 \cdot A_2^2$

【例10】

京源学校集团运动会期间,将6位志愿者分成3组,每组2人,分赴运动会的3个不同比赛项目服务,不同的分配方案有()种.

- A. 15 B. 60 C. 90 D. 270

【例 11】

某校在“数学联赛”考试后选取了 6 名教师参加阅卷，试卷共 4 道解答题，要求将这 6 名教师分成 4 组，每组改一道解答题，其中 2 组各有 2 名教师，另外 2 组各有 1 名教师，则不同的分配方案的种数是 ()

- A. 216 B. 420 C. 720 D. 1080

【例 12】

《爸爸去哪儿》的热播引发了亲子节目的热潮，某节目制作组选取了 6 户家庭到 4 个村庄体验农村生活，要求将 6 户家庭分成 4 组，其中 2 组各有 2 户家庭，另外 2 组各有 1 户家庭，则不同的分配方案的总数是 ()

- A. 216 B. 420 C. 720 D. 1080

【例 13】

在建党 100 周年来临之际，我们国家的脱贫攻坚取得了重大胜利，某县为了巩固脱贫攻坚的胜利成果，选派 6 名工作区人员去 A, B, C 三个村去，每个村至少 1 人，则不同的人员分配方式有 _____ 种。



5.1.2.6 定序与部分元素相同模型

难度 ★★★

提高、目标专属

【例1】

甲、乙、丙、丁四个人排成一行，则乙、丙两人位于甲同侧的排法总数是 ()

- A. 16 B. 12 C. 8 D. 6

【例2】

中国古代的五音，一般指五声音阶，依次为：宫、商、角、徵、羽；如果把这五个音阶全用上，排成一个5个音阶的音序，且要求宫、羽两音阶在角音阶的同侧，可排成多少种这样的不同音序 ()

- A. 120 B. 90 C. 80 D. 60

【例3】

已知参加某项活动的六名成员排成一排合影留念，且甲乙两人均在丙领导人的同侧，则不同的排法共有_____种.

【例4】

将 A, B, C, D, E, F, G 七个字母排成一排，且 A, B, C 均在 G 的同侧，则不同的排法共有 () 种.

- A. 630 B. 1260 C. 2520 D. 5040

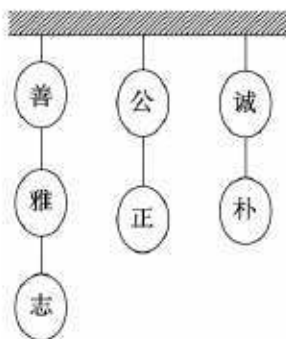
【例5】

4 本相同的数学书和 3 本不同的语文书分给 7 个人, 每人 1 本, 共有不同分法种数为 ()

- A. C_7^4 B. A_7^2 C. A_7^4 D. A_7^3

【例6】

2013 年 11 月, 重庆巴蜀中学举行 80 周年校庆, 主办方将“善、雅、志; 公正; 诚朴”做成灯笼悬挂在主会场(如图所示), 校庆结束后, 要将这 7 个灯笼撤下来, 每次撤其中一列最下面的一个, 则不同的撤法种数为 ()



- A. 180 B. 210 C. 330 D. 524

【例7】

英文单词“sentence”由 8 个字母构成, 将这 8 个字母重新组合排列, 一共可以得到英文单词的个数为(可以认为每个组合都是一个有意义的单词) ()

- A. 3360 B. 3390 C. 4200 D. 4530

【例8】

若把英文单词“book”的字母顺序写错了, 则出现的错误可能有 ()

- A. 6 种 B. 11 种 C. 23 种 D. 24 种



5.1.2.7 隔板法模型

难度 ★★★

【例1】

把16本相同的书按照以下要求分别放到 A 、 B 、 C 三个柜子中,请问各有多少种方法:

- (1) 要求每个柜子中至少有1本书;
- (2) 要求每个柜子中至少有3本书;
- (3) 要求 A 柜中至少有1书, B 柜中至少有2书, C 柜中至少有3书;
- (4) 柜子中可以空着不放书.

【例2】

- (1) 不定方程 $x_1 + x_2 = 8$ 的正整数解有 _____ 组；
- (2) 不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ 的正整数解有 _____ 组；
- (3) 不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ 的正整数解有 _____ 组；

【例3】

不定方程 $x + y + z = 12$ 的非负整数解的个数为 _____.

【例4】

将 10 个完全相同的小球放入编号分别为 1, 2, 3 的三个盒子中, 要求每个盒子中球的个数不小于它的编号, 则不同的放法种数为 ()

- A. 10 B. 12 C. 13 D. 15

【例5】

将 10 本完全相同的科普知识书, 全部分给甲、乙、丙 3 人, 每人至少得 2 本, 则不同的分法种数为 ()

- A. 720 种 B. 420 种 C. 120 种 D. 15 种

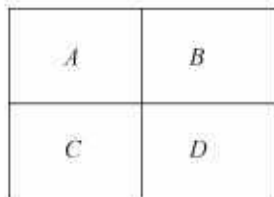


5.1.2.8 链状染色模型

难度 ★★★

【例1】

用红、黄、蓝三种颜色给图中的 A 、 B 、 C 、 D 四个小方格涂色，使相邻小方格(有公共边的小格)不同色，三种颜色可用完也可不用完，则不同的涂色方案种数为 ()



A. 6 种

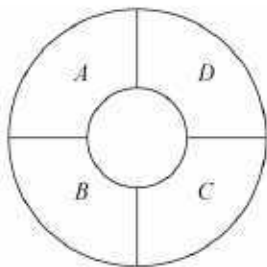
B. 12 种

C. 18 种

D. 24 种

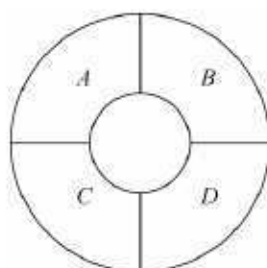
【例2】

如图所示，将一环形花坛分成 A 、 B 、 C 、 D 四块，现有 5 种不同的花供选种，要求在每块里种 1 种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为 _____

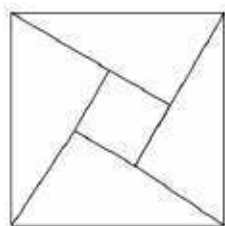


【例3】

如图，一环形花坛分为 A 、 B 、 C 、 D 四块，要求在每块里种一种花，且相邻的 2 块种不同的花。若在三种花种选择两种花种植，有多少种不同的种法？

**【例4】**

如图是某届国际数学家大会的会标，现在有 4 种颜色给其中 5 个小区域涂色，规定每个区域只涂一种颜色，相邻区域颜色不相同，则不同的涂色方案种数为 ()



A. 72

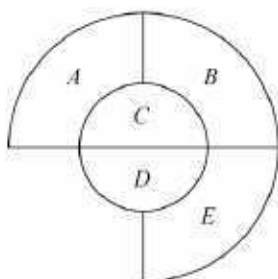
B. 48

C. 36

D. 24

【例5】

已知一个公园的形状如图所示, 现有4种不同的植物要种在此公园的 A, B, C, D, E 这五个区域内, 要求有公共边界的两块相邻区域种不同的植物, 则不同的种法共有_____种.



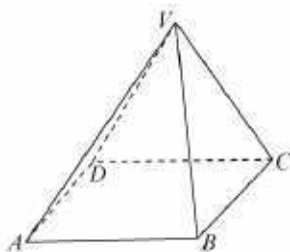
【例6】

将底面各边边长均不相等的四棱锥 $S-ABCD$ 的每一个面都染上一种颜色, 并使有公共边的两个面异色, 现有5种颜色可供使用, 则不同的染色方法有_____

- A. 420 种 B. 360 种 C. 480 种 D. 320 种

【例7】

现有四种颜色给正四棱锥 $V-ABCD$ 的五个顶点涂色, 要求每个顶点涂一种颜色, 且每条棱的两个顶点涂不同颜色, 则不同的涂法有_____



- A. 72 种 B. 36 种 C. 12 种 D. 60 种



5.1.2.9 间接计数模型与容斥原理

难度 ★★★

提高、目标专属

【例1】

现从甲、乙等7名大学生中选出3人担任北京冬奥会的志愿者，要求甲、乙至少1人入选，则不同的选法共有 ()

- A. 10 种 B. 20 种 C. 25 种 D. 35 种

【例2】

小颖同学从8道导数题和2道计数题中选3道题进行测试，则她至少选中1道计数题的选法有 ()

- A. 56 B. 64 C. 72 D. 144

【例3】

用0, 1, 2, 3, 4这五个数字，可以组成有重复的三位数的个数为 ()

- A. 52 B. 60 C. 100 D. 90

【例4】

某校举行歌唱比赛,高一年级从6名教师中选出3名教师参加,要求李老师,王老师两名老师至少有一人参加,则参加的三名老师不同的唱歌顺序的种数为_____。(用数字作答)

【例5】

从0, 1, 2, 3, 4中取3个不同的数组成一个三位数,且这个数大于200,共有_____不同的可能.

【例6】

在2010年广州亚运会期间,调查某班50名学生对乒乓球和羽毛球比赛的关注情况,发现有35名学生喜欢看乒乓球比赛,有30名学生喜欢看羽毛球比赛,有5名学生对乒乓球和羽毛球比赛都不感兴趣,则既喜欢看乒乓球比赛又喜欢看羽毛球比赛的学生人数是 ()

- A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

【例7】

(2008年复旦大学自主招生选拔测试真题)五个不同元素 $a_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 排成一排,规定 a_1 不许排第一, a_2 不许排第二,不同的排法共有 ()

- A. 64种 B. 72种 C. 78种 D. 84种



5.1.2.10 排列组合的综合应用

★★★

提高专属

【例1】

甲、乙、丙、丁、戊共 5 名同学进行劳动技能比赛，决出第 1 名到第 5 名的名次，甲和乙去询问成绩，回答者对甲说：“很遗憾，你没有得到冠军”，对乙说：“你不是最后一名”，从这两个回答分析，5 人名次的不同排列情况共有 ()

- A. 72 种 B. 78 种 C. 96 种 D. 102 种

【例2】

某村镇道路上有 10 盏照明路灯，为了节约用电，需要关闭其中不相邻的 3 盏，但考虑行人夜间出行安全，两端的路灯不能关闭，则关灯方案的种数有 ()

- A. 60 B. 35 C. 20 D. 5

【例3】

某中学举行全区教研活动，有 10 名志愿者参加接待工作，若每天排早、中、晚三班，每班至少 3 人，每人每天值一班，则教研活动当天不同的排班种数为 ()

- A. $\frac{C_{10}^4 C_6^3 C_3^3}{A_2^2}$ B. $\frac{C_{10}^3 C_7^3 C_4^4 A_3^3}{A_2^2}$
C. $\frac{C_{10}^3 C_7^4 C_3^3}{A_3^3}$ D. $A_{10}^1 A_7^1 A_4^4$

【例4】

某学校举行2023年春季运动会,某班级有3名运动员参加4项不同的运动项目,每名运动员至少参加一个项目,至多参加两个项目,每个项目只有一名运动员参加,则所有不同的情况共有 ()

- A. 24种 B. 36种 C. 48种 D. 72种

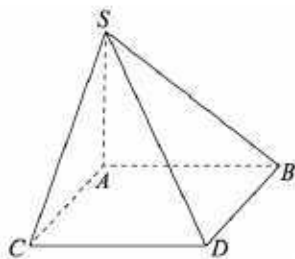
【例5】

A, B, C, D, E 共5人排成一列,要求 A 与 B 不相邻,且 C 排在 A 后面,则共有()种排法.

- A. 36 B. 54 C. 72 D. 96

【例6】

如图所示,将四棱锥 $S-ABCD$ 的每一个顶点染上一种颜色,并使同一条棱上的两端异色,如果只有5种色可供使用,则不同的染色方法种数为 ()



- A. 960 B. 420 C. 360 D. 240

【例 7】

将 7 个相同的球放入 4 个不同的盒子中，则每个盒子都有球的放法种数为 ()

- A. 22 B. 25 C. 20 D. 48

【例 8】

学校高三大理班周三上午四节、下午三节有六门科目可供安排，其中语文和数学各自都必须上两节而且两节连上，而英语、物理、化学、生物最多上一节，则不同的功课安排有_____种情况。

考点 5.1.3 二项式定理

【知识梳理】

一、二项式定理

$$1. (a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

这个式子表示的规律叫做二项式定理, 等号右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式.

2. 展开式的性质:

①项数: 共有 $n+1$ 项;

②系数: 依次为组合数 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^r, \cdots, C_n^n$.

③每一项的次数是一样的, 即为 n 次, 展开式依 a 的降幂排列, b 的升幂排列展开.

二、二项式展开式的通项

$(a+b)^n$ 展开式中的第 $r+1$ 项为: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r (0 \leq r \leq n, r \in \mathbb{Z})$

三、二项式系数的性质

1. 在二项展开式中与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等;

2. 二项展开式的中间项二项式系数最大.

当 n 是偶数时, 中间项是第 $\frac{n}{2} + 1$ 项, 它的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大;

当 n 是奇数时, 中间项为两项, 即第 $\frac{n+1}{2}$ 项和第 $\frac{n+1}{2} + 1$ 项, 它们的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 最大.

3. 系数和:

$$\textcircled{1} C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$\textcircled{2} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$$

【例2】

(2020年上海春季高考真题第8题)已知二项式 $(2x + \sqrt{x})^8$, 则展开式中 x^3 的系数为_____.

【例3】

(2021年天津卷高考真题第11题)在 $(2x^3 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中, x^6 的系数是_____.

【例4】

(2014年湖北卷高考真题理科第2题)若二项式 $(2x + \frac{a}{x})^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是84, 则实数

$a =$

()

A. 2

B. $\sqrt[3]{4}$

C. 1

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【例5】

(2015年陕西卷高考真题理科第4题)二项式 $(x+1)^n (n \in \mathbf{N}_+)$ 的展开式中 x^2 的系数为15, 则

$n =$

()

A. 7

B. 6

C. 5

D. 4

【例6】

(2011 年陕西卷高考真题理科第 4 题) $(x^2 - x^{-4})^6 (x \in \mathbf{R})$ 展开式中的常数项是 ()

A. -20

B. -15

C. 15

D. 20

【例7】

(2020 年全国课标Ⅲ卷高考真题理科第 14 题) $(x^2 + \frac{2}{x})^n$ 的展开式中常数项是_____ (用数字作答).

【例8】

(2011 年安徽卷高考真题理科第 12 题) 设 $(x-1)^{21} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{21}x^{21}$, 则 $a_{10} + a_{11} =$ _____.



5.1.3.2 二项式定理的系数和

难度 ★★★

提高、目标专属

【例1】

已知 $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 1023 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $n =$ ()

- A. 11 B. 9 C. 10 D. 12

【例2】

已知二项式 $(x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 展开式的二项式系数和为 64, 则展开式中常数项为 ()

- A. 10 B. 15 C. 18 D. 30

【例3】

若 $(2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中所有二项式系数之和等于 1024, 那么其展开式中常数项为 ()

- A. 90 B. -90 C. 180 D. -180

【例4】

若 $(x - \frac{2}{x})^5$ 的展开式中的二项式系数和为 A ，各项系数和为 B ，则 $A - B =$ ()

- A. 33 B. 31 C. -33 D. -31

【例5】

已知 $a > 0$ ，二项式 $(x + \frac{a}{x})^6$ 的展开式中所有项的系数和为 64，则展开式中的常数项为

- ()
A. 36 B. 30 C. 15 D. 10

【例6】

已知 $(\frac{2\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{x})^n$ 的展开式中所有项的系数之和为 729，则该展开式中 $\frac{y^2}{x^3}$ 项的系数是

- ()
A. 12 B. 60 C. 120 D. 160

【例7】

若 $(1 - 2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5$ ，则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_5 =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

【例8】

已知 $(1+x)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{2022}x^{2022}$, 则 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2021} =$ ()

A. 2^{2022} B. 2^{2021} C. 2^{2020} D. 2^{2023}

【例9】

多项式 $(1+x)^5(2x-1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则 $a_1 =$ _____, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 =$ _____.

【例10】

已知 $(2x-1)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 记 $n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100}$, 则 $n =$ _____.



5.1.3.3 换元法与多项式展开

难度 ★★★

目标专属

【例1】

若 $x^8 = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_7(x+1)^7 + a_8(x+1)^8$, 则 $a_3 =$ ()

A. 56

B. 28

C. -28

D. -56

【例2】

若 $(1-x)^8 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_8(1+x)^8$, 则 $a_6 =$ ()

A. -448

B. -112

C. 112

D. 448

【例3】

设 $(x+2)^2(x+3)^3 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + a_4(x+1)^4 + a_5(x+1)^5$, 则

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ _____, $a_5 =$ _____.

【例4】

在 $(x^2 - 2x + y)^6$ 的展开式中, 含 x^5y^2 项的系数为 ()

- A. -480 B. 480 C. -240 D. 240

【例5】

在二项式 $(x^2 + x + 1)^5$ 的展开式中, 含 x^4 项的系数是 ()

- A. 15 B. 30 C. 40 D. 45

【例6】

在 $(3x^3 - 5x^2 + 1)^5$ 的展开式中, 除 x^5 项之外, 剩下所有项的系数之和为 ()

- A. 299 B. -301 C. 300 D. -302

专题 5.2 随机变量及其分布

考点 5.2.1 概率基础与条件概率

【知识梳理】

1. 随机事件及其概率

1) 随机试验 E 的每个可能的基本结果称为样本点, 全体样本点的集合称为试验 E 的样本空间, 用 Ω 表示样本空间, 用 ω 表示样本点;

2) Ω 总会发生, 我们称 Ω 为必然事件; $\emptyset$ 为不可能事件;

2. 互斥事件与对立事件

1) 不可能同时发生的两个事件称为互斥事件;

2) 如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 任意两个都是互斥事件, 则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此互斥;

3) 如果事件 A, B 互斥, 那么事件 $A+B$ 发生的概率, 等于事件 A, B 发生的概率的和, 即: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

4) 如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此互斥, 则有:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

5) 对立事件: 两个互斥事件中必有一个要发生, 则称这两个事件为对立事件.

① 事件 A 的对立事件记作 $\bar{A}$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

② 对立事件一定是互斥事件, 互斥事件未必是对立事件.

3. 古典概型

具有以下两个特征的试验称为古典概型试验, 其数学模型称为古典概率模型, 简称古典概型:

1) 有限性: 样本空间的样本点只有有限个;

2) 等可能性: 每个样本点发生的可能性相等.

古典概型中的基本事件: 一次试验中可能出现的每一个基本结果;

古典概型概率计算公式: 一次试验的等可能基本事件共有 n 个, 事件 A 包含了其中的 m 个基本事件, 则事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

4. 条件概率

(1) 对任意两个事件 A 与 B , 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立, 则称事件 A 与事件 B 相互独立, 简称为独立.

(2)一般地, 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) > 0$, 我们称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率

(3) 概率的乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

5. 贝叶斯公式

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega, P(B) > 0$, 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$$

6. 全概率公式

一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$, 有 $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$.

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

7. 几何概型

(1) 几何概型与古典概型相对, 将等可能事件的概念从有限向无限的延伸. 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(或面积、体积、度数等连续变量)成比例, 则称这样的概率模型为几何概率模型, 简称为几何概型.

比如: 对于一个随机试验, 我们将每个基本事件理解为从某个特定的几何区域内随机地取一点, 该区域中每一个点被取到的机会都一样; 而一个随机事件的发生则理解为恰好取到上述区域内的某个指定区域中的点. 这里的区域可以是线段, 平面图形, 立体图形等.

(2) 古典概型与几何概型的主要区别在于: 几何概型是另一类等可能概型, 它与古典概型的区别在于试验的结果是无限个.

(3) 几何概型的特点有下面两个:

无限性: 试验中所有可能出现的基本事件(结果)有无限多个.

等可能性: 每个基本事件出现的可能性相等

(4) 注意: $P(A) = 0$ 是事件 A 为不可能事件的必要不充分条件, 二者并不等价.

【典型例题】



5.2.1.1 用排列组合计算古典概型的相关问题

难度 ★★★

【例1】

(2019 年全国课标Ⅱ卷高考真题文科第4题)生物实验室有5只兔子,其中只有3只测量过某项指标,若从这5只兔子中随机取出3只,则恰有2只测量过该指标的概率为 ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

【例2】

(2017 年山东卷高考真题理科第8题)从分别标有1,2,⋯,9的9张卡片中不放回地随机抽取2次,每次抽取1张,则抽到在2张卡片上的数奇偶性不同的概率是 ()

A. $\frac{5}{18}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{5}{9}$

D. $\frac{7}{9}$

【例3】

一个盒子里装有若干个均匀的红球和白球,每个球被取到的概率相等.若从盒子里随机取一个球,取到的球是红球的概率为 $\frac{1}{3}$,若一次从盒子里随机取两个球,取到的球至少有一个是白球的概率为 $\frac{10}{11}$.

(1)该盒子里的红球、白球分别为多少个?

(2)若一次从盒子中随机取出3个球,求取到的白球个数不少于红球个数的概率.

【例4】

(2014年全国课标Ⅰ卷高考真题文科第3题)将2本不同的数学书和1本语文书在书架上随机排成一行,则2本数学书相邻的概率为_____.

【例5】

共有5名同学参加演讲比赛,在安排出场顺序时,甲、乙排在一起,且丙与甲、乙都不相邻的概率为 ()

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{2}{5}$

【例6】

(2019 年全国课标 I 卷高考真题理科第 6 题)我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是 ()



A. $\frac{5}{16}$

B. $\frac{11}{32}$

C. $\frac{21}{32}$

D. $\frac{11}{16}$

【例7】

(2021 年全国甲卷高考真题理科第 10 题)将 3 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 ()

A. 0.3

B. 0.5

C. 0.6

D. 0.8

【例8】

为了贯彻落实中央新疆工作座谈会和全国对口支援新疆工作会议精神, 促进新疆教育事业发
展, 某市教育系统选派了三位男教师和两位女教师支援新疆, 这五位教师被分派到三个不同地
方对口支援, 每位教师只去一个地方, 每个地方都有老师去, 则两位女教师被分派到同一个地
方的概率为 ()

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{6}{25}$

C. $\frac{12}{25}$

D. $\frac{64}{75}$

Rating: ★★

有三张密封的奖券，其中一张有奖，现共有三人按顺序抽奖，每人抽一张，则哪个人抽到奖的概率最大？ ()

- 飞沫传播是新冠肺炎传播的主要途径，已知患者通过飞沫传播被感染的概率为 $\frac{2}{3}$ ，假设甲、乙两人是否被飞沫感染相互独立，则甲、乙两患者至少有一人是通过飞沫传播被感染的概率为

- 某产品需要通过两类质量检验才能出货，已知该产品第一类检验单独通过率为 $\frac{3}{4}$ ，第二类检验单独通过率为 p ($0 < p < 1$)，规定：第一类检验不通过则不能进入第二类检验，每类检验未通过可修复后再检验一次，修复后无需从头检验，通过率不变且每类检验最多两次，且各类检验间相互独立。若该产品能出货的概率为 $\frac{5}{6}$ ，则 $p =$ ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

【例 4】

一个袋子中装有大小和质地相同的 5 个球，其中有 2 个红色球，3 个绿色球，从袋中不放回地依次随机摸出 2 个球，下列结论正确的是 ()

- A. 第一次摸到绿球的概率是 $\frac{2}{5}$ B. 第二次摸到绿球的概率是 $\frac{3}{10}$
 C. 两次都摸到绿球的概率是 $\frac{3}{10}$ D. 两次都摸到红球的概率是 $\frac{4}{25}$

【例 5】

笼内关有 6 只果蝇，不慎混入 2 只苍蝇，只好把笼子打开一个小孔，让蝇子一只一只飞出去，直到 2 只苍蝇都飞出笼子时，笼内还有 3 只果蝇的概率等于 ()

- A. $\frac{27}{256}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{5}{14}$ D. $\frac{27}{64}$

【例 6】

某袋中装有黑球和白球共 7 个，从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\frac{1}{7}$ ，现在甲、乙两人从袋中轮流取 1 个球，甲先取，乙后取，然后甲再取……每次取出后不放回，直到两人中有一人取到白球为止，每个球在每一次被取出的机会是等可能的，用 X 表示取球终止时所需要的取球次数，求：

- (1) 袋中原有白球的个数；
- (2) 取球 2 次终止的概率；
- (3) 甲取到白球的概率.



5.2.1.3 条件概率公式的概念与应用

难度 ★★★

【例1】

从数字1~6中任选两个不同的数,枚举出所有可能的情况,然后:

- (1)求较小数字是2的概率
- (2)求两数之和为6的概率
- (3)求最小数字是2且两数之和为6的概率
- (4)若较小数字是2,求两数之和为6的概率
- (5)若两数之和为6,求较小数字是2的概率

【例2】

一个家庭有两个小孩，假设生男生女是等可能的，已知这个家庭有一个是女孩的条件下，这时另一个也是女孩的概率是 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

【例3】

大熊猫活到十岁的概率是 0.8，活到十五岁的概率是 0.6，若现有一只大熊猫已经十岁了，则他活到十五岁的概率是 ()

A. 0.8

B. 0.75

C. 0.6

D. 0.48

【例4】

已知盒子中装有形状、大小完全相同的五张卡片，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5，现每次从中任意取一张，取出后不再放回，若抽取三次，则在前两张卡片所标数字之和为偶数的条件下，第三张为奇数的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$

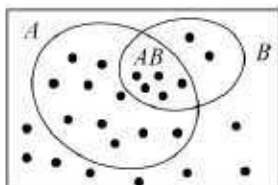
B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{8}$

【例5】

如图长方形中有某随机试验的所有的25个等可能的样本点, 事件A含有15个样本点, 事件B含有7个样本点, 交事件AB含有5个样本点, 则 $P(B|A) =$ ()



A. $\frac{1}{5}$

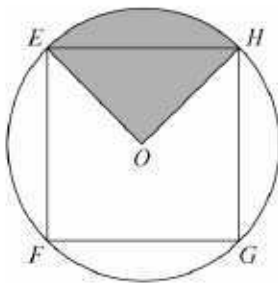
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{7}{15}$

【例6】

(2011年湖南卷高考真题理科第15题)如图, $EFGH$ 是以 O 为圆心, 半径为1的圆的内接正方形. 将一颗豆子随机地扔到该圆内, 用 A 表示事件“豆子落在正方形 $EFGH$ 内”, B 表示事件“豆子落在扇形 OHE (阴影部分)内”, 则



(1) $P(A) =$ _____;

(2) $P(B|A) =$ _____.



5.2.1.4 全概公式

★★★

精英专属

【例1】

已知某地区 7% 的男性和 0.49% 的女性患色盲，假如男性、女性各占一半，从中随机选一人，则此人恰是色盲的概率是 ()

A. 0.01245

B. 0.05786

C. 0.02865

D. 0.03745

【例2】

英国数学家贝叶斯(1701–1763)在概率论研究方面成就显著，创立了贝叶斯统计理论，对于统计决策函数、统计推断等做出了重要贡献。根据贝叶斯统计理论，事件 $A, B, \bar{A}$ (A 的对立事件) 存在如下关系： $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$ 。若某地区一种疾病的患病率是 0.02，现有一种试剂可以检验被检者是否患病，已知该试剂的准确率为 99%，即在被检验者患病的前提下用该试剂检测，有 99% 的可能呈现阳性；该试剂的误报率为 5%，即在被检验者未患病的情况下用该试剂检测，有 5% 的可能会误报阳性。现随机抽取该地区的一个被检验者，用该试剂来检验，结果呈现阳性的概率为 ()

A. 0.0688

B. 0.0198

C. 0.049

D. 0.05

【例3】

设某医院仓库中有 10 盒同样规格的 X 光片，已知其中有 5 盒、3 盒、2 盒依次是甲厂、乙厂、丙厂生产的，且甲、乙、丙三厂生产该种 X 光片的次品率依次为 $\frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$ ，现从这 10 盒中任取一盒，再从这盒中任取一张 X 光片，则取得的 X 光片是次品的概率为 ()

A. 0.08

B. 0.1

C. 0.15

D. 0.2

【例4】

已知某疾病在人群中有 0.1% 的患病率. 一种检测仪器有 99% 的可能把患该病的患者确诊(即有 1% 的假阴性), 也有 0.3% 的可能把非患者误诊为患者(假阳性).

(1) 若该检测仪随机检测人群中的任一人, 显示检测结果为患者的概率有多大?

(2) 若甲被该仪器确认为患者, 甲真实患病的概率有多大?

(3) 若甲复诊后再次被确认为患者, 甲真实患病的概率有多大?

(注: 本题正确列式后, 可以使用计算机辅助计算, 答案取百分数小数点一位近似即可. 请同学尝试解释计算结果的意义.)



5.2.1.5 事件的独立性

难度 ★★★

目标、精英专属

【例1】

(多选)已知随机事件 A, B 发生的概率分别为 $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$, 下列说法正确的有 ()

- A. 若 $P(AB) = 0.18$, 则 A, B 相互独立
- B. 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = 0.6$
- C. 若 $P(B|A) = 0.4$, 则 $P(AB) = 0.12$
- D. 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A|B) = 0.3$

【例2】

当 $P(B) > 0$ 时, 若 $P(\bar{A}) = 1 - P(A|B)$, 则 ()

- A. $A \subseteq B$
- B. $A \cap B = \emptyset$
- C. A 与 B 相互独立
- D. A 与 B 互为对立

【例3】

有 8 张不同的卡片, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 从中有放回的随机取两次, 每次取 1 张卡片, A 表示事件“第一次取出的卡片上的数字是 8”, B 表示事件“第二次取出的卡片上的数字是 6”, C 表示事件“两次取出的卡片上的数字之差的绝对值是 2”, D 表示事件“两次取出的卡片上的数字之差的绝对值是 4”, 则 ()

- A. A 与 C 相互独立
- B. A 与 D 相互独立
- C. B 与 C 相互独立
- D. C 与 D 相互独立

【例4】

将甲、乙、丙、丁4名医生随机派往①, ②, ③三个村庄进行义诊活动, 每个村庄至少派1名医生, A 表示事件“医生甲派往①村庄”; B 表示事件“医生乙派往①村庄”; C 表示事件“医生乙派往②村庄”, 则 ()

A. 事件 A 与 B 相互独立

B. 事件 A 与 C 相互独立

C. $P(B|A) = \frac{5}{12}$

D. $P(C|A) = \frac{5}{12}$

【例5】

(多选)甲罐中有5个红球, 2个白球和3个黑球, 乙罐中有4个红球, 3个白球和3个黑球, 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 分别以事件 A_1 , A_2 和 A_3 表示从甲罐取出的球是红球, 白球和黑球; 再从乙罐中随机取出一球, 以事件 B 表示从乙罐取出的球是红球, 则下列结论中正确的是 ()

A. 事件 B 与事件 A_1 相互独立

B. A_1 , A_2 , A_3 是两两互斥的事件

C. $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$

D. $P(B) = \frac{5}{22}$



5.2.1.6 条件概率多选题与应试思维综合应用

难度 ★★★

【例1】

(多选) 设样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 含有等可能的样本点, 且 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, 则下列结论正确的是 ()

A. $P(AB) = P(A)P(B)$

B. $P(A|C) = P(C|A)$

C. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

D. $P(\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{B})P(\overline{C})$

【例2】

(多选) 一口袋中有除颜色外完全相同的 3 个红球和 2 个白球, 从中无放回的随机取两次, 每次取 1 个球, 记事件 A_1 : 第一次取出的是红球; 事件 A_2 : 第一次取出的是白球; 事件 B : 取出的两球同色; 事件 C : 取出的两球中至少有一个红球, 则 ()

A. 事件 A_1, A_2 为互斥事件B. 事件 B, C 为独立事件

C. $P(B) = \frac{2}{5}$

D. $P(C|A_2) = \frac{3}{4}$

【例3】

(多选) 在一个盒子中装有 4 个大小形状均相同, 编号为 1~4 的小球, 从中有放回地随机取两次, 每次取 1 个球, 记事件 A : “第二次取到球的号码小于等于 2”, 事件 B : “两次取到球的号码之和为奇数”, 事件 C : “两次取到球的号码之积为偶数”, 则 ()

A. B 与 C 互斥B. A 与 C 相互独立

C. $P(A+C) = \frac{7}{8}$

D. $P(B|C) = \frac{2}{3}$

【例4】

(多选) 掷一枚质地均匀的骰子, 可等可能的得到 1~6 点, 现投掷一次这枚骰子, 记得到 1 点或 2 点或 3 点为事件 A , 事件 B, C 与 A 为两两互不相同的随机事件, 且 $P(B) \neq 0, P(C) \neq 0$, 则 ()

- A. 存在事件 B , 使得 $P(AB) = 0$
 B. 存在事件 C , 使得 $P(AC) = 1$
 C. 存在事件 B, C , 使得 $P(C|B) = \frac{1}{2}$
 D. 存在事件 B, C , 使得 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

【例5】

(多选) 已知随机事件 A, B 满足 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B) = \frac{1}{4}$, $P(A+B) = 1$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $P(A) = P(B)$
 B. $P(A) = \frac{3}{4}$
 C. $P(B|A) = P(B)$
 D. $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{3}$

考点 5.2.2 离散型随机变量及其分布列

【知识梳理】

离散型随机变量的分布列

一般地，设离散型随机变量 X 的可能取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，我们称 X 取每一个值 x_i 的概率

$$P(X=x_i)=p_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

为 X 的概率分布列，简称分布列，用表格表示为：

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

性质：

$$(1) p_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$(2) p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

【典型例题】



5.2.2.1 随机变量的概念与简单分布列

难度

☆☆☆

提高专属

【例1】

下列事件：

- ①连续两次抛掷同一个骰子，两次都出现2点；
- ②某人买彩票中奖；
- ③从集合 $\{1, 2, 3\}$ 中任取两个不同元素，它们的和大于2；
- ④在标准大气压下，水加热到 90°C 时会沸腾.

其中是随机事件的个数是

()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【例2】

下列 X 是离散型随机变量的是

()

- ①某座大桥一天经过的车辆数 X ；
- ②在一段时间间隔内某种放射性物质放出的 α 粒子数 η ；
- ③一天之内的温度 X ；
- ④一射手对目标进行射击，击中目标得1分，未击中得0分，用 X 表示该射手在一次射击中的得分.

- A. ①②③④ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

【例7】

若某射手射击所得环数 X 的概率分布列为:

X	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	m	0.29	0.22

则 $P(7 < X < 9) =$ ()

A. 0.28

B. 0.88

C. 0.79

D. 0.51

【例8】

写出下列离散型随机变量的分布列

- (1) 从 1~6 中任选两个不同的数, 其中较小的数字为随机变量 X ;
- (2) 掷一枚质地均匀的硬币 3 次, 其中正面朝上的次数为随机变量 Y ;
- (3) 口袋中有大小形状相同的 6 个白球和 2 个黑球, 从中任意取出 2 个球, 其中白球个数为随机变量 Z ;

考点 5.2.3 离散型随机变量的数字特征

【知识梳理】

1. 随机变量的数字特征

(1) 期望

$$\text{公式: } E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$\text{性质: } E(aX + b) = aE(X) + b$$

(2) 方差与标准差

$$\text{公式: } D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

$$\text{性质: } D(aX + b) = a^2 D(X)$$

$$\text{标准差: } \sigma = \sqrt{D(X)}$$

$$(3) \text{期望与方差的关系: } D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

2. 大数定律

通俗意义上, 大数定律是指在试验不变的条件下, 重复试验多次, 随机事件的频率近似于它的概率. 例如, 在重复投掷一枚硬币的随机试验中, 观测投掷了 n 次硬币中出现正面的次数. 不同的 n 次试验, 出现正面的频率(出现正面次数与 n 之比)可能不同, 但当试验的次数 n 越来越大时, 出现正面的频率将大体上逐渐接近于 $\frac{1}{2}$.

【典型例题】



5.2.3.1 期望

难度 ★☆☆

【例1】

已知随机变量 X , X 的期望 $EX = -\frac{1}{3}$, X 分布列为:

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	a	b

则 a, b 的值分别为

()

A. $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}$

B. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}$

C. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}$

D. $a = \frac{3}{8}, b = \frac{1}{8}$

【例2】

从装有 3 个白球 m 个红球 n 个黄球(这些小球除颜色外完全相同)的布袋中任取两个球, 记取出的白球的个数为 X , 若 $E(X) = \frac{3}{5}$, 取出一白一红的概率为 $\frac{1}{3}$, 则取出一红一黄的概率为

()

A. $\frac{4}{15}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{9}$

【例 3】

(2021 年全国高考 I 卷高考真题第 18 题) 某学校组织“一带一路”知识竞赛, 有 A, B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答, 若回答错误则该同学比赛结束; 若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答, 无论回答正确与否, 该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分, 否则得 0 分; B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分, 否则得 0 分.

已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8, 能正确回答 B 类问题的概率为 0.6, 且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

- (1) 若小明先回答 A 类问题, 记 X 为小明的累计得分, 求 X 的分布列;
- (2) 为使累计得分的期望最大, 小明应选择先回答哪类问题? 并说明理由.

【例4】

现有两种投资方案，一年后投资盈亏的情况如

①投资股市：

投资结果	获利 40%	不赔不赚	亏损 20%
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

②购买基金：

投资结果	获利 20%	不赔不赚	亏损 10%
概率	p	$\frac{1}{3}$	q

- (1) 已知甲、乙两人分别选择了“投资股市”和“购买基金”进行投资，如果“一年后他们中至少有一人获利”这件事的概率大于 $\frac{4}{5}$ ，求 p 的取值范围；
- (2) 丙要将家中闲置的 10 万元钱进行投资，决定在“投资股市”和“购买基金”这两种方案中选择一种，已知 $p = \frac{1}{2}$ ， $q = \frac{1}{6}$ ，那么丙选择哪种投资方案，才能使得一年后投资收益的数学期望较大？给出结果并说明理由。



5.2.3.2 方差与标准差

【例 1】

已知随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

你能用两种方法求方差与标准差吗?

【例2】

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内增大时 (你还能用其他方法判断 $D(X)$ 的变化规律吗?) ()

- A. $D(X)$ 增大
B. $D(X)$ 先增大后减小
C. $D(X)$ 减小
D. $D(X)$ 先减小后增大

【例3】

已知 $E(X) = 9$, $D(X) = 2$, 则

(1) $E(2X-1) =$ _____; (2) $D(2X-1) =$ _____

【例4】

已知随机变量 X 的分布列如表:

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	m	n

若 $E(X) = 0$, 则 $D(2X-1) =$ ()

- A. 5 B. 4 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{9}{4}$

【例 5】

有甲、乙两家公司都需要招聘求职者，这两家公司的聘用信息如下：

甲公司					乙公司				
职位	A	B	C	D	职位	A	B	C	D
月薪/千元	5	6	7	8	月薪/千元	4	6	8	10
获得相应 职位概率	0.4	0.3	0.2	0.1	获得相应 职位概率	0.4	0.3	0.2	0.1

- (1) 若两人分别去应聘甲、乙两家公司的 C 职位，记这两人被甲、乙两家公司的 C 职位录用的人数和为 η ，求 η 的分布列；
- (2) 根据甲、乙两家公司的聘用信息，如果你是该求职者，你会选择哪一家公司？说明理由。

【例6】

惠州市某高中学校组织航天科普知识竞赛，分小组进行知识问题竞答。甲乙两个小组分别从6个问题中随机抽取3个问题进行回答，答对题目多者为胜。已知这6个问题中，甲组能正确回答其中4个问题，而乙组能正确回答每个问题的概率均为 $\frac{2}{3}$ 。甲、乙两个小组的选题以及对每题的回答都是相互独立，互不影响的。

(2)若从甲乙两个小组中选拔一组代表学校参加全市决赛，请分析说明选择哪个小组更好？



5.2.3.3 【数学思维】数字特征的意义与策略的应用

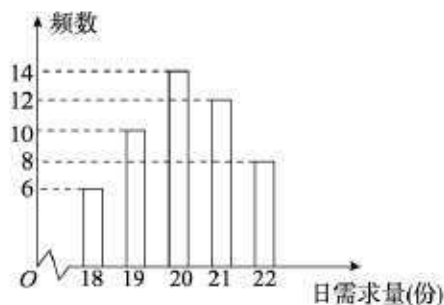
难度 ★★★

目标、菁英专属

【例 1】

某熟食品销售店，每天以 15 元一份的价格从厂家购进某熟食品，然后以 25 元一份的价格出售，如果当天卖不完，则该食品将被按 10 元一份的价格由厂家收回；若当天供不应求，则可从其它销售店周转购进，进价为 20 元一份，由于不是从厂家直接购进，周转购进没卖完的熟食，厂家不负责收回，故从其它销售店周转购进的熟食按需购进，假设全部卖完。

- (1) 若该店一天购进 20 份该熟食品，求当天的利润 y (单位：元) 关于当天的需求量 n (单位：份， $n \in \mathbf{N}$ ， $n \leq 25$) 的函数解析式；
- (2) 该销售店记录了 50 天该熟食产品的日需求量如图所示：(以 50 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率) 若该店一天购进 20 份该熟食， X 表示当天的利润 (单位：元)，求 X 的分布列及数学期望；由于有事外出一个星期，该店请了一位销售人员来负责，该负责人建议将每天购进的熟食提高到 22 份，你觉得该建议是否合理，请说明理由。



【例2】

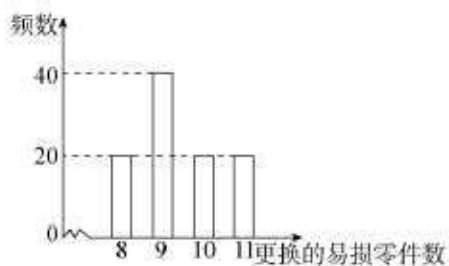
某公司计划购买2台机器,该种机器使用三年后即被淘汰.机器有一易损零件,在购进机器时,可以额外购买这种零件作为备件,每个200元.在机器使用期间,如果备件不足再购买,则每个500元.现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件,为此搜集并整理了100台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数,得如图柱状图:

以这100台机器更换的易损零件数的频率代替1台机器更换的易损零件数发生的概率,记 X 表示2台机器三年内共需更换的易损零件数, n 表示购买2台机器的同时购买的易损零件数.

(I)求 X 的分布列;

(II)若要求 $P(X \leq n) \geq 0.5$,确定 n 的最小值;

(III)以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据,在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一,应选用哪个?





5.2.3.4 【数学思维】实际问题中复杂概率的计算

难度 ★★★

目标专属

【例 1】

某医院为筛查某种疾病，需要检验血液是否为阳性，现有 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 份血液样本，有以下两种检验方式：①逐份检验，需要检验 n 次；②混合检验，将其 $k (k \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } k \geq 2)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验，若检验结果为阴性，这 k 份的血液全为阴性，因而这 k 份血液样本只要检验一次就够了，如果检验结果为阳性，为了明确这 k 份血液究竟哪几份为阳性，就要对这 k 份再逐份检验，此时这 k 份血液的检验次数总共为 $k+1$ 次。假设在接受检验的血液样本中，每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的，且每份样本是阳性结果的概率为 $p (0 < p < 1)$ 。

- (1) 假设有 5 份血液样本，其中只有 2 份样本为阳性，若采用逐份检验的方式，求恰好经过 3 次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率；

【例2】

2021年5月12日,2022北京冬奥会和冬残奥会吉祥物冰墩墩、雪容融亮相上海展览中心.为了庆祝吉祥物在上海的亮相,某商场举办了一场赢取吉祥物挂件的“双人对战”游戏,游戏规则如下:参与对战的双方每次从装有3个白球和2个黑球(这5个球的大小、质量均相同,仅颜色不同)的盒子中轮流不放回地摸出1球,摸到最后1个黑球或能判断出哪一方获得最后1个黑球时游戏结束,得到最后1个黑球的一方获胜.设游戏结束时对战双方摸球的总次数为 X .

- (1)求随机变量 X 的概率分布;
- (2)求先摸球的一方获胜的概率,并判断这场游戏是否公平.

【例 3】

足球比赛全场比赛时间为 90 分钟，在 90 分钟结束时成绩持平，若该场比赛需要决出胜负，需进行 30 分钟的加时赛，若加时赛仍是平局，则采取“点球大战”的方式决定胜负。“点球大战”的规则如下：①两队应各派 5 名队员，双方轮流踢点球，累计进球个数多者胜；②如果在踢满 5 轮前，一队的进球数已多于另一队踢满 5 次可能射中的球数，则不需再踢，譬如：第 4 轮结束时，双方进球数比为 2:0，则不需再踢第 5 轮了；③若前 5 轮点球大战中双方进球数持平，则采用“突然死亡法”决出胜负，即从第 6 轮起，双方每轮各派 1 人罚点球，若均进球或均不进球，则继续下一轮，直到出现一方进球另一方不进球的情况，进球方胜。

(1) 已知小明在点球训练中射进点球的概率是 $\frac{3}{5}$ ，在一次赛前训练中，小明射了 3 次点球，且

每次射点球互不影响，记 X 为射进点球的次数，求 X 的分布列及数学期望。

(2) 现有甲、乙两校队在淘汰赛中(需要分出胜负)相遇，120 分钟比赛后双方仍旧打平，须互

罚点球决出胜负。设甲队每名球员射进点球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，乙队每名球员射进点球的概率为

$\frac{1}{2}$ ，每轮点球中，进球与否互不影响，各轮结果也互不影响。求在第 4 轮结束时，甲队进

了 3 个球并刚好胜出的概率。

考点 5.2.4 二项分布与超几何分布

【知识梳理】

1. 两点分布

X	0	1
P	$1-p$	p

$$E(X) = p, D(X) = p(1-p)$$

2. 二项分布 $X \sim B(n, p)$: n 重伯努利试验发生 k 次的概率

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0, 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = np, D(X) = np(1-p)$$

3. 超几何分布 $X \sim H(n, M, N)$: 含有 M 件次品的 N 件产品中, 任取 n 件中含有 k 件次品的概率

$$P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=m, m+1, m+2, \dots, r$$

其中 $n, N, M \in \mathbb{N}^+$, $M \leq N$, $n \leq N$, $m = \max\{0, n-N+M\}$, $r = \min\{n, M\}$

4. 几何分布 $X \sim Ge(p)$: n 重伯努利试验中第 k 次才第一次成功的概率

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$$

【典型例题】



5.2.4.1 两点分布

难度 ★★★

提高专属

【例1】

两点分布也叫 0-1 分布，已知随机变量 X 服从参数为 0.5 的两点分布，则下列选项中不正确的是 ()

A. $P(X=0)=0.5$

B. $P(X=1)=0.5$

C. $E(X)=0.5$

D. $D(X)=0.5$

【例2】

(2017 年浙江卷高考真题第 8 题) 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i=1)=p_i$, $P(\xi_i=0)=1-p_i$, $i=1$,

2. 若 $0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$, 则 ()

A. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$

B. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

C. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$

D. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

【例3】

已知随机变量 X 的分布列为 ()

X	1	0
P	p	$1-p$

若 $D(X) = \frac{p}{3}$ ($0 < p < 1$), 则 p 的值为 ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【例4】

某知名电脑品牌为了解客户对其旗下的三种型号电脑的满意情况,随机抽取了一些客户进行回访,调查结果如表:

电脑型号	I	II	III
回访客户(人数)	250	400	350
满意度	0.5	0.4	0.6

满意度是指,回访客户中,满意人数与总人数的比值.用满意度来估计每种型号电脑客户对该型号电脑满意的概率,且假设客户是否满意相互独立.

- (1)从型号 I 和型号 II 电脑的所有客户中各随机抽取 1 人,记其中满意的人数为 X ,求 X 的分布列和期望;
- (2)用“ $\xi_1 = 1$ ”,“ $\xi_2 = 1$ ”,“ $\xi_3 = 1$ ”分别表示 I, II, III 型号电脑让客户满意,“ $\xi_1 = 0$ ”,“ $\xi_2 = 0$ ”,“ $\xi_3 = 0$ ”分别表示 I, II, III 型号电脑让客户不满意,比较三个方差 $D(\xi_1)$ 、 $D(\xi_2)$ 、 $D(\xi_3)$ 的大小关系.

【例 5】

(2018 年北京卷高考真题理科第 17 题) 电影公司随机收集了电影的有关数据, 经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指: 一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

- (I) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;
- (II) 从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 估计恰有 1 部获得好评的概率;
- (III) 假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等. 用 “ $\xi_k = 1$ ” 表示第 k 类电影得到人们喜欢, “ $\xi_k = 0$ ” 表示第 k 类电影没有得到人们喜欢 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). 写出方差 $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5, D\xi_6$ 的大小关系.



5.2.4.2 二项分布

难度 ★★★

【例1】

设二项分布 $X \sim B(n, p)$ 的随机变量 X 的均值与方差分别是 2.4 和 1.44, 则二项分布的参数 $n =$ _____, $p =$ _____.

【例2】

一名学生申请加入学校的 3 个社团, 假设各个社团通过这名学生的申请是相互独立的, 并且概率都是 $\frac{3}{5}$, 设 X 是这名学生申请被通过的次数, 则随机变量 X 的期望为 ()

A. $\frac{6}{5}$

B. $\frac{36}{25}$

C. $\frac{18}{25}$

D. $\frac{9}{5}$

【例3】

某射手每次射击击中目标的概率是 $\frac{2}{3}$, 且各次射击的结果互不影响, 假设这名射手射击 5 次

(1) 求恰有 2 次击中目标的概率;

(2) 求至少有 3 次击中目标的概率.

(3) 设 X 是击中目标的次数, 求 X 的分布列以及数学期望和方差

【例 4】

(2019 年天津卷高考真题理科第 16 题) 设甲、乙两位同学上学期间, 每天 7:30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立.

- (I) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;
- (II) 设 M 为事件“上学期间的三天中, 甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”, 求事件 M 发生的概率.

【例 5】

(2015 年清华大学金秋营数学基础能力测试真题) 袋中有若干枚均匀硬币, 其中一部分是普通硬币, 其余的两面均为正面, 已知普通硬币占总硬币数的比例为 $\theta (0 < \theta < 1)$. 从袋中任取一枚硬币, 在不查看它属于哪种硬币的前提下, 将其独立地连掷两次.

(I) 以 X 记掷出的正面数, 求 X 的分布列;

(II) 将上述试验独立重复地进行 n 次, 以 Y 记这 n 次试验中不出现正面的次数, 求 Y 的分布列.



5.2.4.3 超几何分布

难度 ★★★

【例1】

一个口袋中有 5 个红球，3 个白球，每次从袋中取出一个球

- (1) 若放回地抽 4 次， X 表示抽到白球的个数，求 X 的分布列与数学期望
- (2) 若不放回地抽 4 次， Y 表示抽到白球的个数，求 Y 的分布列与数学期望

【例2】

某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况,对该流水线上的产品进行简单随机抽样,获得数据如表:

包装质量 (单位:克)	$[490, 495]$	$[495, 500]$	$[500, 505]$	$[505, 510]$	$[510, 515]$
产品件数	3	4	7	5	1

已知包装质量在 $(495, 510]$ 内的产品为一等品,其余为二等品.

- (1)估计从该流水线任取1件产品为一等品的概率;
- (2)从上述抽取的样本产品中任取2件,设 X 为一等品的产品数量,求 X 的分布列;
- (3)从该流水线上任取2件产品,设 Y 为一等品的产品数量,求 Y 的分布列,试比较 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 的大小.

【例 3】

在袋子中装有 10 个大小相同的小球，其中黑球有 3 个，白球有 n ($2 \leq n \leq 5$ ，且 $n \neq 3$) 个，其余的球为红球.

(I) 若 $n=5$ ，从袋中任取 1 个球，记下颜色后放回，连续取三次，求三次取出的球中恰有 2 个红球的概率；

(II) 从袋里任意取出 2 个球，如果这两个球的颜色相同的概率是 $\frac{4}{15}$ ，求红球的个数；

(III) 在 (II) 的条件下，从袋里任意取出 2 个球. 若取出 1 个白球记 1 分，取出 1 个黑球记 2 分，取出 1 个红球记 3 分. 用 ξ 表示取出的 2 个球所得分数的和，写出 ξ 的分布列，并求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

【例4】

某批 n 件产品的次品率为 1%，现在从中任意地依次抽出 2 件进行检验，问：

- (1) 当 $n = 100, 1000, 10000$ 时，分别以放回和不放回的方式抽取，恰好抽到一件次品的概率各是多少？（精确到 0.00001）
- (2) 根据(1)，谈谈你对超几何分布与二项分布关系的认识.



5.2.4.4 【数学思维】几何分布

难度 ★★★

目标专属

【例1】

连续投掷一枚质地均匀的硬币，直到投掷首次出现正面则停止，停止时进行投掷的次数记为随机变量 X

(1) 求 X 的分布列及期望

(2) 根据你的理解说明 EX 的数值所代表的实际含义

【例2】

在一次取球试验中，盒子中装有 2 个黑球和 3 个白球，每次从中有放回地取一个，直到取到黑球停止，求取球次数 X 的分布列

【例3】

在 n 次独立重复试验(伯努利试验)中,若每次试验中事件 A 发生的概率为 p ,则事件 A 发生的次数 X 服从二项分布 $B(n, p)$,事实上,在伯努利试验中,另一个随机变量的实际应用也很广泛,即事件 A 首次发生时试验进行的次数 Y ,显然 $P(Y=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k=1, 2, 3, \dots$, 我们称 Y 服从“几何分布”,经计算得 $EY = \frac{1}{p}$. 据此,若随机变量 X 服从二项分布 $B(n, \frac{1}{6})$ 时,且相应的“几何分布”的数学期望 $E(Y) < E(X)$,则 n 的最小值为 ()

A. 6 B. 18 C. 36 D. 37

【例4】

我们知道,在 n 次独立重复试验(伯努利试验)中,每次试验事件 A 发生的概率均为 p ,则事件 A 发生的次数 X 服从二项分布 $B(n, p)$. 事实上,在无限次伯努利试验中,另一个随机变量的实际应用也很广泛,即事件 A 首次发生时试验进行的次数 Y ,显然 $P(Y=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k=1, 2, 3, \dots$, 我们称 Y 服从“几何分布”,经计算得 $EY = \frac{1}{p}$. 由此推广,在无限次伯努利试验中,试验进行到事件 A 和 $\bar{A}$ 都发生后停止,此时所进行的试验次数记为 Z ,则 $P(Z=k) = p(1-p)^{k-1} + (1-p)p^{k-1}$, $k=2, 3, \dots$, 那么 $E(Z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 5】

已知患色盲的概率为 0.25% ，试求：

- (1) 为发现一例患色盲者至少要检查 25 人的概率
- (2) 为使发现色盲者的概率不小于 0.9 ，至少需要对多少人进行辨色力检查？

考点 5.2.5 正态分布

【知识梳理】

1. 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

正态曲线特点:

①关于直线 $x = \mu$ 对称, 中间高两边低

②在 $x = \mu$ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$

③曲线与 x 轴之间的面积为 1

④当 σ 一定时, 曲线随着的 μ 变换而沿 x 轴平移

⑤当 μ 一定时, 曲线形状由 σ 确定, σ 越小, 曲线越“瘦高”, 表示总体分布越集中; σ 越大, 曲线越“矮胖”, 表示总体分布越分散

3 σ 原则: 在实际应用中, 通常认为服从于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量 X 只取 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之间的值.

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826.$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544.$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974.$$

2. 正态分布的标准化

$\mu = 0, \sigma = 1$ 时的正态分布称为标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$

对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 这一处理称为正态分布的标准化

其意义之一在于标准正态分布的相关数据可以通过查表的方式直接得到.

【典型例题】

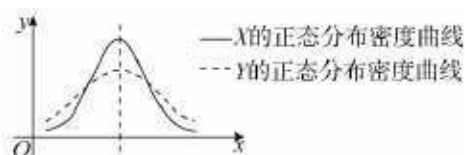


5.2.5.1 正态分布

难度 ★★★

【例1】

某市有甲乙两个工厂生产同一型号的汽车零件，零件的尺寸分别记为 X, Y ，已知 X, Y 均服从正态分布， $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，其正态分布密度曲线如图所示，则下列结论中正确的是 ()



- A. 甲工厂生产零件尺寸的平均值大于乙工厂生产零件尺寸的平均值
- B. 甲工厂生产零件尺寸的平均值小于乙工厂生产零件尺寸的平均值
- C. 甲工厂生产零件尺寸的稳定性高于乙工厂生产零件尺寸的稳定性
- D. 甲工厂生产零件尺寸的稳定性低于乙工厂生产零件尺寸的稳定性

【例2】

已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$ ，且 $P(\xi < 5) = 0.7$ ，则 $P(1 < \xi < 3) =$ ()

- A. 0.1
- B. 0.2
- C. 0.3
- D. 0.4

【例3】

已知随机变量 $X \sim N(16, 16)$, 则 $P(12 \leq X \leq 28) =$ ()

(参考数据: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9544$,

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$)

A. 0.8185

B. 0.84

C. 0.1587

D. 0.9759

【例4】

宁波某高中某次高二年级测试, 经抽样分析, 成绩 X 近似服从正态分布 $N(90, \sigma^2)$, 且 $P(84 < X \leq 90) = 0.3$, 该校有 500 人参加此次测试, 估计该校数学成绩不低于 96 分的学生人数为 ()

A. 60

B. 80

C. 100

D. 120

【例5】

某校高二年级某次数学学业质量检测考试成绩 $X \sim N(80, 25)$, 规定成绩大于或等于 85 分为 A 等级, 已知该年级有考生 500 名, 则这次考试成绩为 A 等级的考生数约为 ()

(附: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$,

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$)

A. 11

B. 79

C. 91

D. 159

【例 6】

2020 年 8 月，教育部发布《关于深化体教融合，促进青少年健康发展的意见》，某校积极响应国家号召，组织全校学生加强实心球项目训练，规定该校男生投掷实心球 6.9 米达标，女生投掷实心球 6.2 米达标，并拟定投掷实心球的考试方案为每生可以投掷 3 次，一旦达标无需再投。从该校任选 5 名学生进行测试，如果有 2 人不达标的概率超过 0.1，则该校学生还需加强实心球项目训练。已知该校男生投掷实心球的距离 ξ_1 服从正态分布 $N(6.9, 0.25)$ ，女生投掷实心球的距离 ξ_2 服从正态分布 $N(6.2, 0.16)$ (ξ_1, ξ_2 的单位：米)。

(I) 请你通过计算，说明该校学生是否还需加强实心球项目训练；

(II) 为提高学生考试达标率，该校决定加强训练，经过一段时间训练后，该校女生投掷实心球的距离 ξ_2 服从正态分布 $N(6.516, 0.16)$ ，且 $P(X \leq 6.832) = 0.785$ 。此时，请判断该校女生投掷实心球的考试达标率能否达到 99%？并说明理由。（取 $\sqrt[3]{10}$ 的值为 2.15）



5.2.5.2 标准正态分布

难度 ★★★

目标专属

【例1】

设随即变量 X 服从标准正态分布, 已知 $P(X \leq 1.88) = 0.97$, 则 $P(|X| \leq 1.88) =$ _____ ()

A. 0.94 B. 0.97 C. 0.06 D. 0.03

【例2】

设随机变量 X 服从标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$, 那么对于任意 a , 记 $\Phi(a) = P(X < a)$, 已知 $\Phi(a) = 0.7$, 则 $P(|X| < a) =$ _____.

【例3】

以 $\Phi(x)$ 表示标准正态总体在区间 $(-\infty, x)$ 内取值的概率, 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 请写出以下式子

- ①若 $\mu = 60$, $\sigma = 10$, 且概率 $P(x < 70)$ 等于 $\Phi(x)$, 则 $x =$ _____.
- ②若 $\mu = 60$, $\sigma = 10$, 且概率 $P(x > 60)$ 等于 $\Phi(x)$, 则 $x =$ _____.
- ③若 $\mu = 60$, $\sigma = 10$, 且概率 $P(60 < x < 70)$ 等于 _____ (结果用 $\Phi(x)$ 表示)
- ④概率 $P(|\xi - \mu| < \sigma)$ 等于 _____ (结果用 $\Phi(x)$ 表示)

【例 4】

用 $\varphi(x)$ 表示标准正态总体在区间 $(-\infty, x)$ 内取值的概率, 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(10, 0.1^2)$, 则概率 $P(|\xi - 10| < 0.1)$ 等于 ()

- A. $\varphi(-9.9)$ B. $\varphi(10.1) - \varphi(9.9)$
C. $\varphi(1) - \varphi(-1)$ D. $2\varphi(10.1)$

【例 5】

正态分布是最重要的一种概率分布, 它是由德国的数学家、天文学家 Moivre 于 1733 年提出, 但由于德国数学家 Gauss 率先应用于天文学研究, 故正态分布又称为高斯分布, 记作 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 的正态分布称为标准正态分布, 如果令 $X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$, 则可以证明 $X \sim N(0, 1)$, 即任意的正态分布可以通过变换转化为标准正态分布. 如果 $X \sim N(0, 1)$ 那么对任意的 a , 通常记 $\Phi(a) = P(X < a)$, 也就是说, $\Phi(a)$ 表示 $N(0, 1)$ 对应的正态曲线与 x 轴在区间 $(-\infty, a)$ 内所围的面积. 某校高三年级 800 名学生, 期中考试数学成绩近似服从正态分布, 高三年级数学成绩平均分 100, 方差为 36, $\Phi(2) = 0.9772$, 那么成绩落在 $(88, 112]$ 的人数大约为 ()

- A. 756 B. 748 C. 782 D. 764

【例6】

已知某高校共有10000名学生,其图书馆阅览室共有994个座位,假设学生是否去自习是相互独立的,且每个学生在每天的晚自习时间去阅览室自习的概率均为0.1.

- (1)将每天的晚自习时间去阅览室自习的学生人数记为 X ,求 X 的期望和方差;
 (2)18世纪30年代,数学家棣莫弗发现,如果随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$,那么当 n 比较大时,可视为 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.任意正态分布都可变换为标准正态分布

($\mu=0$ 且 $\sigma=1$ 的正态分布),如果随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$,那么令 $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$,则可以证明

$Z \sim N(0, 1)$.当 $Z \sim N(0, 1)$ 时,对于任意实数 a ,记 $\Phi(a) = P(Z < a)$.

已知如表为标准正态分布表(节选),该表用于查询标准正态分布对应的概率值.例如当 $a=0.16$ 时,由于 $0.16=0.1+0.06$,则先在表的最左列找到数字0.1(位于第三行),然后在表的最上行找到数字0.06(位于第八列),则表中位于第三行第八列的数字0.5636便是 $\Phi(0.16)$ 的值.

- (i)求在晚自习时间阅览室座位不够用的概率;
 (ii)若要使在晚自习时间阅览室座位够用的概率高于0.7,则至少需要添加多少个座位?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5834	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6404	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224



5.2.5.3 概率统计多选题与应试思维综合应用

难度 ★★★

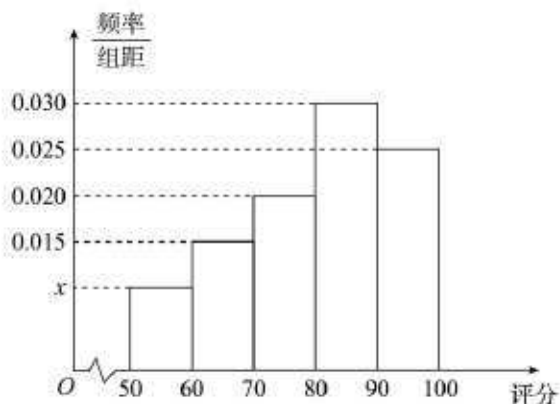
【例 6】

(多选)(2023 新高考 I 卷高考真题第 9 题)有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_6$, 其中 x_1 是最小值, x_6 是最大值, 则 ()

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均数
- B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的中位数
- C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的标准差
- D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的极差

【例 2】

(多选)衡阳市某中学为了加强食堂用餐质量, 该校随机调查了 100 名学生, 根据这 100 名学生对食堂用餐质量给出的评分数据, 分成 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 五组, 得到如图所示的频率分布直方图, 则下列结论正确的是 ()



- A. $x = 0.01$
- B. 为了解评分较低的原因, 该校从评分低于 80 分的学生中用比例分配的分层抽样方法随机抽取 18 人座谈, 则应选取评分在 $[70, 80)$ 的学生 8 人
- C. 该样本数据的中位数和众数均为 85
- D. 若样本数据的平均数低于 85 分, 则认为食堂需要整改, 根据此样本认为该校食堂不需要整改

【例 5】

(多选) 已知离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=x_i)=p_i (i=1, 2, 3, \cdots, n)$. 定义随机变量 $Y=e^{tX} (t \in R, e \text{ 为自然对数的底数, } e=2.71828\cdots)$ 的分布列如下:

Y	e^{tx_1}	e^{tx_2}	$\cdots$	e^{tx_n}
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

随机变量 Y 的数学期望 $E(Y) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^n e^{tx_i} p_i$ 称为随机变量 X 的生成函数, 记为 $M_X(t)$, $M_X'(0)$ 是函数 $M_X(t)$ 在 $t=0$ 处的导数, 则下列选项中错误的是 ()

A. $M_X'(0) = E(X)$

B. 若 X 服从两点分布, $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$, 则 $M_X(t) = \frac{e^t}{2}$

C. 若 $X \sim B(n, p)$, 则 $M_X(t) = (e^p + 1 - p)^n$

D. 若实数 a, b 为常数, 则 $M_{aX+b}(t) = e^{bt} \cdot M_X(at)$

专题 5.3 成对数据的统计分析

考点 5.3.1 成对数据的统计相关性

【知识梳理】

相关系数

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}}
 \end{aligned}$$

$r > 0$ 时, 表明两个变量正相关

$r < 0$ 时, 表明两个变量负相关

$|r|$ 越接近 1, 两个变量的线性相关程度越强; 越接近 0, 两个变量线性相关程度越弱

【典型例题】



5.3.1.1 相关系数的计算

难度 ★★★

提高专属

【例1】

某化工厂为预测产品的回收率 y ，需要研究它和原料有效成分含量 x 之间的相关关系，现收集了4组对照数据.

x	2	4	6	8
y	3	6	7	10

(1) 请根据相关系数 r 的大小判断回收率 y 与 x 之间是否存在高度线性相关关系；(精确到小数点后两位)

$$\text{参考数据: } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

$ r $	1	0	>0.8	<0.3	其他
x, y 相关关系	完全相关	不相关	高度相关	低度相关	中度相关

【例2】

某公司拟对某种材料进行应用改造,产品的成本由原料成本及非原料成本组成,每件产品的非原料成本 y (元)与生产该产品的数量 x (千件)有关,经统计得到如下数据:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	112	61	44.5	35	30.5	28	25	24

对历史数据对比分析,考虑用函数模型① $y = a + \frac{b}{x}$, ② $y = ce^{-x}$ 分别对两个变量的关系进行拟合,令模型①中 $u = \frac{1}{x}$ 上,模型②中 $w = \ln y$,对数据作了初步处理,已计算得到如下数据:

$\bar{u}$	$\bar{y}$	$\bar{u}^2$	$\sum_{i=1}^8 y_i^2$	$\sum_{i=1}^8 u_i^2$	$\sum_{i=1}^8 u_i y_i$	$\sqrt{0.61 \times 6185.5}$	e^{-2}
0.34	45	0.115	22385.5	1.53	183.4	61.4	0.135

(1) 设 u 和 y 的样本相关系数为 r_1 , x 和 w 的样本相关系数为 r_2 , 已经计算得出 $r_2 = -0.94$, 请从样本相关系数(精确到 0.01)的角度判断, 哪个模型拟合效果更好?

$$\text{参考公式: } r = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u} \cdot \bar{v}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2) \cdot (\sum_{i=1}^n v_i^2 - n\bar{v}^2)}}$$

【例 3】

(2022 年全国乙卷高考真题理科第 19 题) 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积(单位: m^2) 和材积量(单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

- (1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;
- (2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数(精确到 0.01);

$$\text{附: 相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377.$$

考点 5.3.2 一元线性回归模型及其应用

【知识梳理】

最小二乘法求回归方程

若变量 x 与 y 具有线性相关关系, 有 n 个样本数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$,

则回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$$

$$\text{其中 } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ 称为样本点的中心

【典型例题】



5.3.2.1 线性回归方程的计算

难度 ★★★

提高专属

【例 1】

如表为某班 5 位同学身高 x (单位: cm) 与体重 y (单位: kg) 的数据:

身高 x	169	172	166	177	161
体重 y	75	80	70	85	65

若两个量之间的回归直线方程为 $\hat{y} = 1.3x + m$, 则 m 的值为 ()

A. -140

B. 140

C. 144.7

D. -144.7

【例4】

(2014 年全国课标Ⅱ卷高考真题理科第19题)某地区2007年至2013年农村居民家庭人均纯收入 y (单位:千元)的数据如表:

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

(Ⅰ)求 y 关于 t 的线性回归方程;

(Ⅱ)利用(Ⅰ)中的回归方程,分析2007年至2013年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况,并预测该地区2015年农村居民家庭人均纯收入.

附:回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

【例 5】

随着全球经济一体化进程的不断加快,机械零件的加工质量决定了制造工厂的生存,零件加工精度逐渐成为供应商判断制造公司产品的标准.已知某公司生产不同规格的一种产品,根据检测精度的标准,其合格产品的质量 $y(\text{g})$ 与尺寸 $x(\text{mm})$ 之间近似满足关系 $y=c \cdot x^b$ (b, c 为大于 0 的常数).现随机从中抽取 6 件合格产品,测得数据如下:

尺寸 $x(\text{mm})$	38	48	58	68	78	88
质量 $y(\text{g})$	16.8	18.8	20.7	22.4	24	25.5

根据测得数据作出如下处理:令 $v_i = \ln x_i$, $u_i = \ln y_i$, 得相关统计量的值如表:

$\sum_{i=1}^6 v_i u_i$	$\sum_{i=1}^6 v_i$	$\sum_{i=1}^6 u_i$	$\sum_{i=1}^6 v_i^2$
75.3	24.6	18.3	101.4

(1) 根据所给统计数据,求 y 关于 x 的回归方程;

(2) 若从一批该产品中抽取 n 件进行检测,已知检测结果的误差 ε_n , 满足 $\varepsilon_n \sim N(0, \frac{2}{n})$, 求至少需要抽取多少件该产品,才能使误差 ε_n 在 $(-0.1, 0.1)$ 的概率不少于 0.9545?

附: ①对于样本 $(v_i, u_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 其回归直线 $u=b \cdot v+a$ 的斜率和截距的最小

二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i u_i - n\bar{v} \cdot \bar{u}}{\sum_{i=1}^n v_i^2 - n\bar{v}^2}$, $\hat{a} = \bar{u} - \hat{b}\bar{v}$, $e \approx 2.7182$.

② $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$.



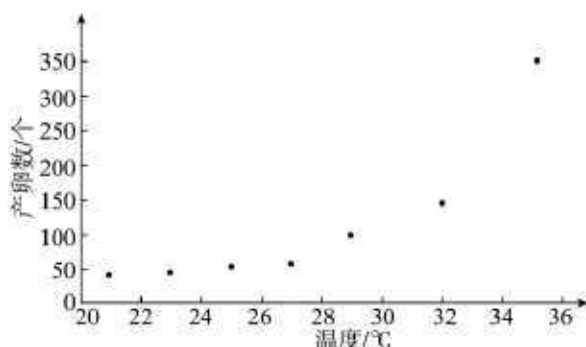
5.3.2.2 非线性回归方程计算

难度 ★★★

目标专属

【例1】

某生物兴趣小组为研究一种红铃虫的产卵数 y 与温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的关系, 现收集了 7 组观测数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 7)$ 得到如图的散点图: 由此散点图, 在 20°C 至 36°C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为红铃虫产卵数 y 和温度 x 的回归方程类型的是 ()



A. $y = a + bx$

B. $y = a + \frac{b}{x}$

C. $y = a + be^x$

D. $y = a + b \ln x$

【例2】

今有一组数据如下:

t	1.99	3.0	4.0	5.1	6.12
v	1.5	4.04	7.5	12	18.01

在以下四个模拟函数中, 最合适这组数据的函数是 ()

A. $v = \log_2 t$

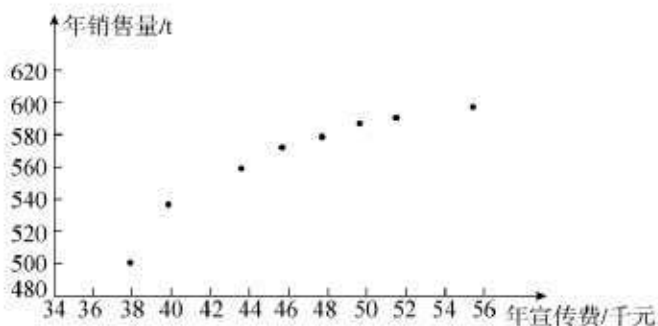
B. $v = \log_{\frac{1}{2}} t$

C. $v = \frac{t^2 - 1}{2}$

D. $v = 2t - 2$

【例 3】

(2015 年全国课标 I 卷高考真题理科第 19 题) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响, 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i=1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$

(I) 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(III) 已知这种产品的年利润 z 与 x 、 y 的关系为 $z = 0.2y - x$. 根据 (II) 的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距

的最小二乘估计分别为: $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$.

【例4】

某地为调查国家提出的乡村振兴战略目标实施情况,根据对该乡村某产品产量统计,由该乡村企业的产量 y (万只)与月份编号 x (记年份 2021 年 10 月, 2021 年 11 月, … 分别为 $x=1$, $x=2$, …, 依此类推) 的散点图, 得到如下判断: 产量 y (万只) 与月份编号 x 可近似满足关系式 $y=c \cdot x^b$ (c, b 为大于 0 的常数), 相关统计量的值如表所示:

$\sum_{i=1}^6 (\ln x_i \cdot \ln y_i)$	$\sum_{i=1}^6 (\ln x_i)$	$\sum_{i=1}^6 (\ln y_i)$	$\sum_{i=1}^6 (\ln x_i)^2$
-1.87	6.60	-2.70	9.46

根据所给统计量, 求 y 关于 x 的回归方程; 并估计该企业今年 6 月份的利润为多少万元 (估算取 $e \approx 2.7$, 精确到 0.1)?

附: 对于一组数据 $(u_i, v_i) (i=1, 2, 3, \dots, n)$, 其回归直线 $\hat{v} = \hat{b}u + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二

乘估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n \bar{u} \bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \bar{u}^2}$, $\hat{a} = \bar{v} - \hat{b} \bar{u}$.

考点 5.3.3 列联表与独立性检验

【知识梳理】

(1) 根据样本数据列出 2×2 列联表

(2) 计算随机变量 K^2 的观测值 k ，根据表格数据确定临界值 k_0

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \quad (\text{其中 } n = a+b+c+d)$$

(3) 如果 $k \geq k_0$ ，就推断“ X 与 Y 有关系”，这种推断犯错误的概率不超过 $P(K^2 \geq k_0)$ ；否则，就认为在犯错误概率不超过 $P(K^2 \geq k_0)$ 的前提下，不能推断“ X 与 Y 有关系”

【典型例题】



5.3.3.1 卡方独立性检验

难度 ★★☆☆

提高、目标专属

【例 1】

查了 100 例(称为病例组)，同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组)，得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

$$\text{附：} K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【例2】

4月16日摩拜单车进驻大连市旅顺口区,绿色出行引领时尚.旅顺口区对市民进行“经常使用共享单车与年龄关系”的调查统计,若将单车用户按照年龄分为“年轻人”(20岁~39岁)和“非年轻人”(19岁及以下或者40岁及以上)两类,抽取一个容量为200的样本,将一周内使用的次数为6次或6次以上的称为“经常使用单车用户”,使用次数为5次或不足5次的称为“不常使用单车用户”.已知“经常使用单车用户”有120人,其中 $\frac{5}{6}$ 是“年轻人”,已知“不常使用单车用户”中有 $\frac{3}{4}$ 是“年轻人”.

(1)请根据已知的数据,填写下列 2×2 列联表:

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用单车用户			
不常使用单车用户			
合计			

(2)请根据(1)中的列联表,计算 χ^2 值并判断能否有95%的把握认为经常使用共享单车与年龄有关?

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【例3】

我市连续两年举行了全民健身中短跑赛，为此某机构对人们参加中短跑运动的情况进行了统计调查，从参与运动的人中随机抽取 200 人，对其每周参与中短跑训练的天数进行统计，得到如表统计表：

平均每周进行中短跑 训练天数(单位：天)	$t \leq 2$	$2 < t < 5$	$t \geq 5$
人数	30	130	40

若某人平均每周进行中短跑训练天数不少于 5，则称其为“热烈参与者”，否则称为“非热烈参与者”。

根据上表的数据，填写下面的 2×2 列联表，并通过计算判断能否在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为“热烈参与者”与性别有关？

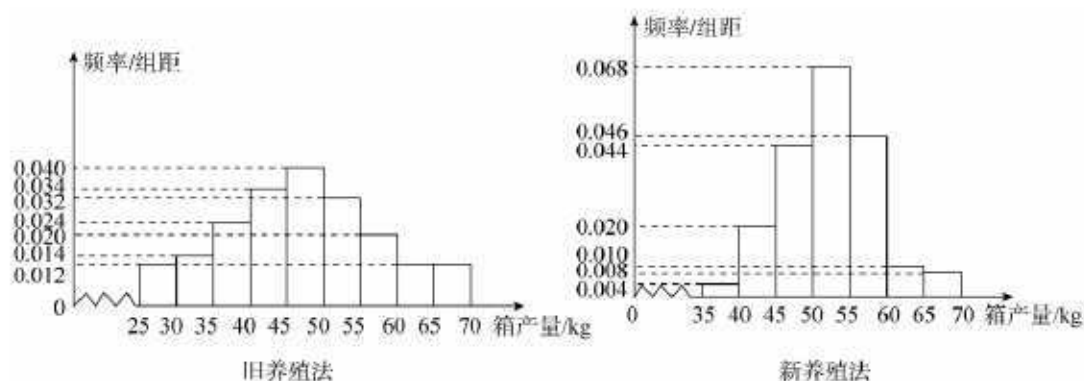
	热烈参与者	非热烈参与者	总计
男			150
女		45	
总计			200

附公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ (n 为样本容量)

$P(K^2 \geq k_0)$	0.500	0.400	0.250	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【例4】

(2017 年全国课标 II 卷高考真题理科第 18 题)海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比,收获时各随机抽取了 100 个网箱,测量各箱水产品的产量(单位: kg),其频率分布直方图如图:



(2)填写下面列联表,并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关:

	箱产量 < 50kg	箱产量 ≥ 50kg
旧养殖法		
新养殖法		

附:

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$