

高二

数学

高二数学学业规划与方法指导（下）

有道高中教研组 编著

预约陪陪 +wangyushu2013

目录

- 001 第一讲 导数的概念与几何意义
- 011 第二讲 导数的计算
- 025 第三讲 导数与函数的单调性、极值(上)
- 037 第四讲 导数与函数的单调性、极值(下)
- 047 第五讲 函数的极值与最值
- 055 第六讲 导数的应用
- 063 第七讲 基本计数原理
- 073 第八讲 排列组合初步
- 085 第九讲 二项式定理初步
- 093 第十讲 综合复习
- 101 第十一讲 导数运算与几何意义进阶
- 113 第十二讲 函数的单调性进阶
- 123 第十三讲 利用参变分离法研究零点与恒成立问题
- 131 第十四讲 复杂恒成立问题
- 141 第十五讲 导数选择填空提升
- 151 第十六讲 排列组合(1)
- 161 第十七讲 排列组合(2)

169	第十八讲	二项式定理进阶
177	第十九讲	条件概率和全概率公式
189	第二十讲	离散型随机变量及其数字特征
199	第二十一讲	随机变量的经典分布
207	第二十二讲	统计综合
221	第二十三讲	零轮复习之基本函数与运算
231	第二十四讲	零轮复习之解不等式
241	第二十五讲	零轮复习之逻辑转换化归能力

第一讲

导数的概念与几何意义

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	4.1.1.1 导数的定义(基础)	1 星
	4.1.1.2 导数的定义(进阶)	1 星
核心精讲	4.1.1.3 求在 P 点处的切线	1 星
拔高拓展	4.1.1.4 求过 P 点处的切线	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】 导数的定义

【例1】

已知函数 $f(x) = x^2 + 3$ ，当自变量由 1 变到 1.1 时，函数的平均变化率为 ()

A. 1

B. 1.1

C. 2

D. 2.1

【例2】

已知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数为 3，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例3】

已知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = 2$ ，则 $f'(x_0) = (\quad)$

A. 1

B. $\frac{1}{3}$

C. 3

D. $\frac{2}{3}$

【核心精讲】在点切线问题

【例4】

(2007 湖北卷高考真题文科第 13 题) 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在 $M(1, f(1))$ 处的切线方程是

$$y = \frac{1}{2}x + 2, \quad f(1) + f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例5】

(2021 华侨、港澳台高考真题第 15 题) 曲线 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ 在点 $(-2, 3)$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【例6】

(2010 全国大纲 II 卷高考真题文科第 7 题) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(1, b)$ 处的切线方程是 $x - y + 1 = 0$, 则 ()

A. $a = 1, b = 2$

B. $a = -1, b = 2$

C. $a = 1, b = -2$

D. $a = -1, b = -2$

【拔高拓展】过点切线问题

【例7】

已知曲线 $f(x) = x^3 - x$ ，求：

- (1) 曲线在点 $(-1, 0)$ 处的切线方程；
- (2) 曲线过点 $(-1, 0)$ 的切线方程；
- (3) 曲线平行于直线 $11x - y + 1 = 0$ 的切线方程.

【例8】

已知 $f(x) = x^3$ ，则函数 $f(x)$ 的图象过点 $(1, 1)$ 的切线方程为_____.

【随堂练习】

1. 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 且 $x_0 \in (a, b)$ 若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = 2$, 则

A. $f'(x_0) = 1$

B. $f'(x_0) = 2$

C. $f'(x_0) = 4$

D. $f'(x_0)$ 不确定

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, 若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{2h} = \frac{1}{2}$, 则 $f'(2) =$

A. -1

B. $-\frac{1}{4}$

C. 1

D. $\frac{1}{4}$

3. 已知 $f'(x_0) = 6$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x}$ 的值是

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. -2

4. 曲线 $y = x(x^2 - 1)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 ()

- A. $x = 1$ B. $y = 1$ C. $y = 2x + 1$ D. $y = 2x - 2$

5. (2013 全国大纲卷高考真题文科第 10 题) 已知曲线 $y = x^4 + ax^2 + 1$ 在点 $(-1, a + 2)$ 处切线的斜率为 8, $a =$ ()

- A. 9 B. 6 C. -9 D. -6

6. (2024 全国甲卷高考真题文科第 7 题) 曲线 $f(x) = x^6 + 3x - 1$ 在 $(0, -1)$ 处的切线与坐标轴围成的面积为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. (多选) 曲线 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$ 过原点的切线方程可以为 ()

- A. $y = -2x$ B. $y = -x$ C. $y = 0$ D. $y = x$

8. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$, 直线 l 过点 $(0, 1)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切, 则直线 l 的斜率为 ()

- A. 24 B. 24 或 -3 C. 45 D. 0 或 45

【课后巩固】

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = 1$, 则 $f'(x_0)$ 等于

A. $-\frac{2}{3}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. 1

D. -1

2. (2015 全国课标I卷高考真题文科第14题) 已知函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线过点 $(2, 7)$, 则 $a =$ _____.

3. 已知曲线 $S: y = 2x - x^3$.

(1) 求曲线 S 在点 $A(1, 1)$ 处的切线方程;

(2) 求过点 $B(2, 0)$ 并与曲线 S 相切的直线方程.

第二讲

导数的计算

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	4.1.2.1 基本初等函数的导数及运算法则(基础)	1 星
	4.1.2.2 基本初等函数的导数及运算法则(进阶)	1 星
	4.1.2.3 复合函数的导数	1 星
核心精讲	4.1.1.5 判断切线条数问题	3 星
拔高拓展	4.1.1.5 判断切线条数问题	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】 导数的计算(整式乘法)

【例1】

求下列函数在指定点处的切线方程:

(1) $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处;

(2) $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处;

(3) $y = \cos x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 处.

【例2】

计算 $y = \tan x$ 的导数, 并判断 $y = x$ 是否是 $y = \tan x$ 的切线.

【例3】

求下列函数的导数

$$(1) y = \frac{2x-1}{x+2};$$

$$(2) f(x) = \frac{3-2x}{x^2};$$

$$(3) f(x) = \frac{e^x}{x^2 + ax + a} \quad (a \text{ 为参数})$$

【例4】

求函数 $f(x) = (x+1)(2x+1)(3x+1)$ 的导数

【核心精讲】判断三次函数的切线条数

【例5】

已知 $f(x) = 2x^3 + (a-2)x^2 - 3x$ 是奇函数，则过点 $P(-1, 2)$ 向曲线 $y = f(x)$ 可作的切线条数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 不确定

【例6】

已知函数 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ ，则过点 $(0, 0)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的切线的条数为 ()

- A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

【例7】

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$.

- (1) 若过点 $P(2, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的一条切线, 则 t 的取值范围是 _____;
- (2) 若过点 $P(2, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的两条切线, 则 t 的取值范围是 _____;
- (3) 若过点 $P(2, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则 t 的取值范围是 _____.

【拔高拓展】 复杂函数切线条数的判断

【例8】

若过点 $(1, b)$ 可以作曲线 $y = \ln(x+1)$ 的两条切线, 则 ()

- A. $\ln 2 < b < 2$ B. $b > \ln 2$ C. $0 < b < \ln 2$ D. $b > 1$

【例9】

若曲线 $y = (1-x)e^x$ 有两条过点 $A(a, 0)$ 的切线, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-3, 1)$
- C. $(-\infty, -3)$ D. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

【随堂练习】

1. (2020 课标 I 卷高考真题文科第 15 题) 曲线 $y = \ln x + x + 1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为 _____.

2. (2021 课标甲卷高考真题理科第 13 题) 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为 _____.

3. (2022 新高考北京卷高考真题第 20 题) 已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性; (高二春季导数单调性讨论之超越函数再讲)

4. (2023·全国乙卷理科高考真题第21题) 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{x} + a)\ln(1+x)$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 是否存在 a, b , 使得曲线 $y = f(\frac{1}{x})$ 关于直线 $x = b$ 对称, 若存在, 求 a, b 的值, 若不存在, 说明理由; (高三一轮直播讲函数性质可以秒)

(3) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值, 求 a 的取值范围.

5. (2020 新高考天津卷高考真题压轴第 20 题) 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in R$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 当 $k=6$ 时,

(i) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

6. (2020 新高考山东卷高考真题第 21 题/2020 新高考海南卷高考真题压轴第 22 题) 已知函数

$$f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a.$$

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

7. (2014 北京卷高考真题文科压轴第 20 题) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$.

(Ⅱ) 若过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 t 的取值范围;

(Ⅲ) 问过点 $A(-1, 2)$, $B(2, 10)$, $C(0, 2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切? (只需写出结论)

8. 过点 $A(-5, 0)$ 作曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的切线, 则切线条数最多为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【课后巩固】

1. (2020 新课标 I 卷文科高考真题第 15 题) 曲线 $y = \ln x + x + 1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为_____.

2. (2018 天津卷文科高考真题第 10 题) 已知函数 $f(x) = e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为_____.

3. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$ 和点 $P(1, -1)$, 则过点 P 与该函数图象相切的直线条数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第三讲

导数与函数的 单调性、极值(上)

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	4.1.4.1 不含参数的函数的单调性	1 星
核心精讲	4.1.4.2a 含参函数单调性讨论之可因式分解型(上)	2 星
	4.1.4.2b 含参函数单调性讨论之可因式分解型(下)	2 星
拔高拓展	4.1.4.4 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(上)	3 星
	4.1.4.4 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(下) (目标、菁英专属)	3 星



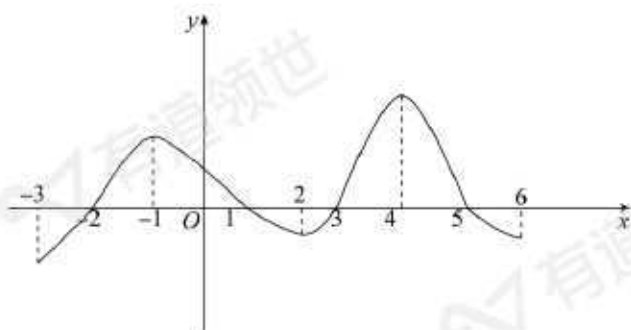
【例题精讲】

【基础巩固】

(一) 函数与导数的关系

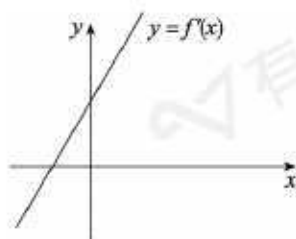
【例1】

$y=f(x)$ 为定义域 $[-3, 6]$ 内可导, 其图像如图所示, 其导函数为 $y=f'(x)$, 则:
不等式 $f'(x) \leq 0$ 的解集为 _____;



【例2】

函数 $y=f(x)$ 的图像过原点, 且它的导数 $y=f'(x)$ 的图像是如图所示的一条直线, 则函数 $y=f(x)$ 的图像的顶点在 ()



- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

(二) 不含参函数的单调性

【例3】

(2009 江苏卷高考真题第3题) 判断函数 $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 6$ 的单调性, 并画出草图

【例4】

(2007 清华大学自主招生选拔测试真题改编) 求下列函数的单调区间, 并画出草图:

(1) $f(x) = x \ln x$

(2) $f(x) = \frac{1}{x} e^x$

(3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

【核心精讲】含参函数单调性讨论—可因式分解型

【例5】

(2007 陕西卷理科高考真题第 20 题) 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + ax + a}$, 其中 a 为实数.

- (I) 若 $f(x)$ 的定义域为 R , 求 a 的取值范围;
(II) 当 $f(x)$ 的定义域为 R 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

【例6】

(2021 课标甲卷高考真题文科第 20 题改编) 设函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

- (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【拔高拓展】不可因式分解

【例7】

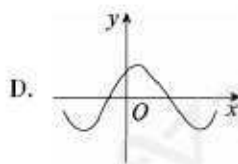
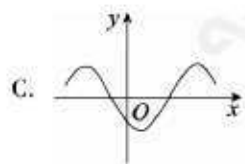
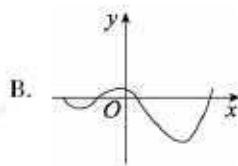
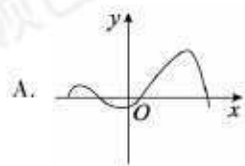
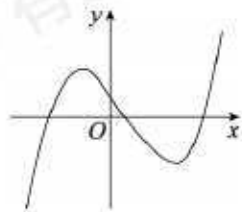
(2009 重庆卷理科高考真题第18题) 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + k (k > 0)$ 在 $x=0$ 处取得极值, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线垂直于直线 $x+2y+1=0$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 若函数 $g(x) = \frac{e^x}{f(x)}$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

【随堂练习】

1. (2017 新高考浙江卷高考真题第 7 题) 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是 ()



2. (2022 新高考 II 卷高考真题压轴第 22 题) 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求 a 的取值范围; (高三一轮端点恒成立技巧)

(3) 设 $n \in \mathbb{N}^+$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$. (高三二轮求和型放缩)

3. (2022 新高考浙江卷高考真题压轴第 22 题) 设函数 $f(x) = \frac{e}{2x} + \ln x (x > 0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

4. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 - (a+2)x (a \in \mathbb{R})$.

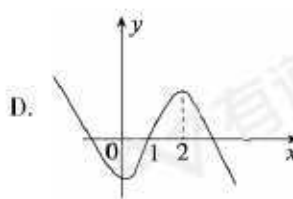
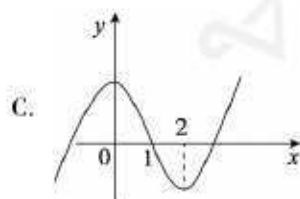
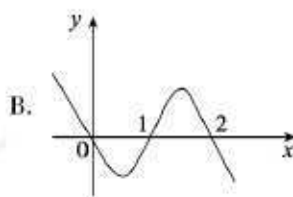
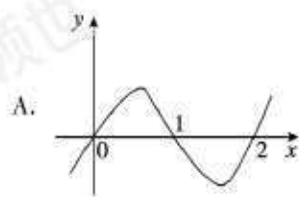
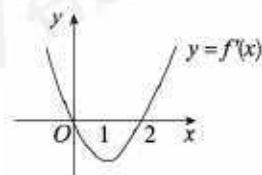
(1) 当 $a > 0$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

5. (2017 全国课标Ⅲ卷高考真题文科压轴第21题)已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性; (视频《4.1.4.2b 含参数函数单调性讨论之可因式分解型(下)》
原题)

【课后巩固】

1. (2004 浙江卷高考真题第 11 题) 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则 $y=f(x)$ 的图象最有可能的是 ()



2. (2017 新课标 II 卷高考真题文科压轴第 21 题) 设函数 $f(x) = (1-x^2) \cdot e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

3. (2010 湖南卷文科高考真题第 21 题) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} + x + (a-1)\ln x + 15a$, 其中 $a < 0$,

且 $a \neq -1$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

第四讲

导数与函数的 单调性、极值(下)

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	4.1.4.6 已知单调性求参之导数为二次型(目标专属)	2 星
拔高拓展	4.1.4.7 已知单调性求参之导数为非二次型(目标专属)	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】二次恒成立(Δ)

【例1】

关于 x 的一元二次不等式 $2x^2 - kx + \frac{3}{8} > 0$ 对于一切实数 x 都成立, 则实数 k 满足

()

A. $|k| < \sqrt{3}$

B. $|k| < -\sqrt{3}$

C. $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

D. $|k| > \sqrt{3}$

【例2】

不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 \geq 0$ 的解集为 $\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$

B. $(-2, 2)$

C. $(-2, 2]$

D. $(-\infty, 2)$

【例3】

当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, -5)$

B. $(-\infty, -5]$

C. $(-5, +\infty)$

D. $[-5, +\infty)$

【例4】

若关于 x 的不等式 $x^2 - m^2x + (m-1) \geq 0$ 在 $(-1, 1)$ 有解, 则 m 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1)$

【例5】

若不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 在 $x \in [-2, 0)$ 时恒成立, 则实数 a 的最大值为 ()

A. 0

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

【核心精讲】 已知单调性求参数(两端+分离)

【例6】

函数 $f(x) = x^3 + x^2 + ax + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(I) 已知 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

【例7】

(2008 全国 I 卷理科高考真题第 19 题/2024 上海徐汇区校级期中第 20 题)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1, a \in \mathbf{R}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ 内是减函数, 求 a 的取值范围

【拔高拓展】一般恒成立问题

【例8】

已知不等式 $ax + 2 - 2\ln x \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{1}{e^2}, +\infty)$ B. $[\frac{2}{e^2}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{e^2}]$ D. $(0, \frac{2}{e^2})$

【例9】

(2022 全国甲卷高考真题理科第 21 题) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < 1$.

【例10】

若对于任意的正实数 x, y 都有 $(2x - \frac{y}{e}) \cdot \ln \frac{y}{x} \leq \frac{x}{me}$ 成立, 则实数 m 的取值范围为

- ()
- A. $(\frac{1}{e}, 1)$ B. $(\frac{1}{e^2}, 1]$ C. $(\frac{1}{e^2}, e]$ D. $(0, \frac{1}{e}]$

【随堂练习】

1. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + 2$. 若函数 $y = \sqrt{f(x)+1}$ 的定义域为 R , 求实数 a 的取值范围;

2. 若关于 x 的不等式 $2x^2 - 5x - 1 - m > 0$ 在 $[1, 3]$ 上有解则实数 m 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, -\frac{33}{8})$

C. $(-\infty, -4)$

D. $(-\infty, -\frac{33}{4})$

3. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 4a < 0$ 在 $(0, 2]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $(-\infty, 2)$

D. $(2, +\infty)$

4. 若函数 $f(x) = e^x(x^2 + a)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$

B. $(-\infty, -8)$

C. $(-\infty, -8]$

D. $[0, +\infty)$

5. (2014 大纲卷文科高考真题第 21 题) 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x (a \neq 0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 求 a 的取值范围.

【课后巩固】

1. (2015 重庆卷高考真题理科第 20 题) 设函数 $f(x) = \frac{3x^2 + ax}{e^x} (a \in \mathbb{R})$

(II) 若 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上为减函数, 求 a 的取值范围.

第五讲

函数的极值与最值

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	4.1.4.8 极值与极值点	2 星
核心精讲	4.1.4.9 最值与值域之具体函数	1 星



【例题精讲】

【基础巩固】函数的极值

【例1】

(2024 新高考 I 卷多选第 10 题改编) 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, 则 ()

A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

【例2】

(2023 澳门高考真题数学试卷第 7 题) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ 在 $x=1$ 处取得极小值 1, 则 $b =$ ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【例3】

(2025 新高考 II 卷填空第 13 题) 若 $x=2$ 是函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点, 则 $f(0) =$ _____.

【例4】

(2021 全国乙卷理科高考真题第 10 题) 设 $a \neq 0$, 若 $x=a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()

A. $a < b$

B. $a > b$

C. $ab < a^2$

D. $ab > a^2$

【核心精讲】简单函数最值

【例5】

(2024 香港高考真题第16题) 函数 $f(x) = e^x - 2x$ 的最小值为_____.

【例6】

函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$, $x \in [0, 5]$ 的最小值为 ()

- A. -16 B. -9 C. 9 D. 16

【例7】

(2022 全国乙卷高考真题文科第11题) 函数 $f(x) = \cos x + (x+1)\sin x + 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的最小值、最大值分别为 ()

- A. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
C. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$ D. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$

【例8】

对于函数 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ 有以下4个命题:

- ① $f(x)$ 有最大值, 但无最小值;
- ② $f(x)$ 有最小值, 但无最大值;
- ③ $f(x)$ 既有极大值, 也有极小值;
- ④ $f(x)$ 既无最大值, 也无最小值.

则真命题的序号是_____. (把所有真命题的序号都填上)

【拔高拓展】含参函数最值问题

【例9】

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$) 的最小值为1, 则 $a =$ _____

- A. $\frac{1}{e}$ B. e C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【例 10】

(2022 新高考 I 卷高考真题第 22 题) 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【例 11】

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 在区间 $(a, a+6)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围为

()

- A. $[-1, 2)$ B. $[-\frac{5}{2}, 1)$ C. $[-2, \frac{3}{2})$ D. $[-1, 1)$

【随堂练习】

1. 已知函数 $f(x) = e^x - x$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{e}$

B. 1

C. $e-1$

D. e

2. 函数 $f(x) = x^3 - 12x$ 在区间 $[-3, 2]$ 上的最大值是 ()

A. -9

B. -16

C. 16

D. 9

3. 函数 $f(x) = \frac{x + \ln x + 1}{xe^x}$ 的最大值为 ()

A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{e}$

D. $\frac{2}{e}$

【课后巩固】

1. 函数 $f(x) = (x-3)e^x$ 的最小值是

A. e^3

B. $-e^3$

C. e^2

D. $-e^2$

()

2. 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e^2]$ 上的最大值是

A. 0

B. $\frac{1}{e}$

C. e

D. $\frac{2}{e^2}$

()

第六讲

导数的应用

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	4.2.3.1a 参变分离法(上)(提高专属)	4 星
	4.2.3.1b 参变分离法(下)(提高专属)	4 星



【例题精讲】

【基础巩固】 零点存在性定理

【例1】

(2014 上海卷高考真题第 19 题) 设 x_0 为函数 $f(x) = 2^x + x - 2$ 的零点, 则 $x_0 \in$ ()

- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

【例2】

(2014 北京卷高考真题文科第 6 题) 已知函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$, 在下列区间中, 包含 $f(x)$ 零点的区间是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 4)$ D. $(4, +\infty)$

【核心精讲】 参变分离法

【例3】

若函数 $f(x) = \ln x - kx$ 有 2 个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -e)$ B. $(-\infty, \frac{1}{e})$ C. $(0, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

【例4】

已知函数 $f(x) = 3x - t \ln x$ 存在两个零点, 则实数 t 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{e}{3}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{e}{3})$ C. $(3e, +\infty)$ D. $(-\infty, 3e)$

【例5】

(2023 全国乙卷高考真题文科第8题) 函数 $f(x) = x^3 + ax + 2$ 存在3个零点, 则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, -3)$ C. $(-4, -1)$ D. $(-3, 0)$

【例6】

已知函数 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$, 若方程 $f(x) = a$ 有三个实数解, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(0, \frac{6}{e^3})$ B. $(-2e, 0)$ C. $(-2e, \frac{6}{e^3})$ D. $(-\frac{2}{e}, 6e^3)$

【拔高拓展】函数性质与零点综合

【例7】

(2017 全国课标Ⅲ卷高考真题文科第12题) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

【例8】

(2024 新高考Ⅱ卷高考真题第6题) 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$ (a 为常数), 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$ ()

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【随堂练习】

- 函数 $f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$ 的零点所在的大致区间为 ()
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, e)$ D. $(e, 3)$
- (2024 全国甲卷高考真题文科第 16 题) 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为 _____.
- 若函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{x}{m}$ 有两个零点, 则实数 m 的取值范围为 ()
 A. $(0, e)$ B. $(e, +\infty)$ C. $(0, 2e)$ D. $(2e, +\infty)$
- 已知函数 $f(x) = \frac{e^{2x} + me^x + 1}{e^x} - \cos x$ 恰有一个零点, 则 $m =$ ()
 A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

【课后巩固】

1. 函数 $f(x) = \log_2 x + 2x - 6$ 的零点个数为

()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

2. 函数 $f(x) = \ln x - ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, \frac{1}{e})$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$

3. 函数 $y = x^3 - ax + \frac{1}{4}$ 存在 3 个零点, 则 a 的取值范围为

()

A. $(-\infty, -\frac{3}{4})$ B. $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ C. $(\frac{3}{4}, +\infty)$ D. $[\frac{3}{4}, +\infty)$

第七讲

基本计数原理

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.1.1.1 枚举法及规律性枚举	1 星
核心精讲	5.1.1.2 加法原理和乘法原理的应用	2 星
拔高拓展	5.1.1.4 多子集个数速解技巧	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】 枚举法

【例1】

用数字1, 2, 3, 4, 5组成没有重复数字的三位数, 其中奇数的个数为 ()

A. 6

B. 12

C. 24

D. 36

【例2】

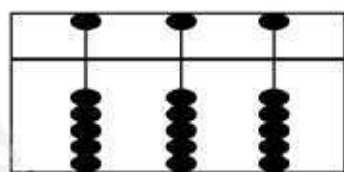
将数字1, 2, 3, 4填入标号为1, 2, 3, 4的四个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填的数字均不同的填法有_____种?

【例3】

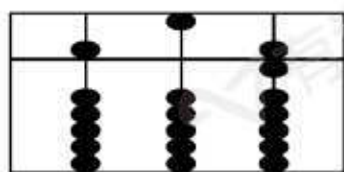
请列举出用0, 1, 2, 3, 4这5个数字所组成的无重复数字且比3000大的, 且相邻的数字的奇偶性不同的所有四位数奇数, 它们分别是_____.

【例4】

程大位(1533-1606)是明代珠算发明家,徽州人。他所编撰的《直指算法统宗》是最早记载珠算开平方、开立方法古算书之一,它完成了计算由筹算向珠算的转变,使算盘成为主要的计算工具。算盘其形长方,周为木框,内贯直柱,俗称“档”。现有一种算盘(如图1)共三档,自右向左分别表示个位、十位和百位,档中横以梁,梁上一珠,下拨一珠记作数字5;梁下五珠,上拨一珠记作数字1。例如:图2中算盘表示整数506。如果拨动图1中算盘的3枚算珠,则可以表示不同的三位整数的个数为_____。



百位 十位 个位
图1



百位 十位 个位
图2

【核心精讲】 加法原理与乘法原理

【例5】

某单位职工义务献血,在体检合格的人中,O型血的共有28人,A型血的共有7人,B型血的共有9人,AB型血的共有3人。

- (1)从中任选1人去献血,有多少种不同的选法?
- (2)从四种血型的人中各选1人去献血,有多少种不同的选法?

【例6】

用0, 1, 2, 3, 4, 5六个数字

- (1) 可以组成多少个三位数?
- (2) 可以组成多少个无重复数字的三位数?
- (3) 可以组成多少个无重复数字的三位偶数?
- (4) 可以组成多少个无重复数字的能被5整除的三位数?
- (5) 可以组成多少个无重复数字的大于300的三位偶数?

【例7】

(2023年全国高考乙卷给高考真题第7题) 甲乙两位同学从6种课外读物中各自选读2种, 则这两人选读的课外读物中恰有1种相同的选法共有 ()

- A. 30种 B. 60种 C. 120种 D. 240种

【例 8】

(2024 新课标 II 卷高考真题填空压轴第 14 题) 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有_____种选法, 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格的 4 个数之和的最大值是_____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

【拔高拓展】复杂集合子集问题

【例 9】

满足 $A_1 \cup A_2 = \{x, y, z\}$ 的有序集合对 (A_1, A_2) 的个数是 ()

- A. 6 B. 8 C. 24 D. 27

【例 10】

集合 A, B 的并集 $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 与 (B, A) 视为不同的对, 则这样的 (A, B) 对的个数为 ()

- A. 12 B. 24 C. 64 D. 81

【例11】

已知 $A, B, C \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2024, 2025\}$, $A \subseteq C, B \subseteq C$, 则有序集合组 $\{A, B, C\}$ 有几组

()

A. 2^{2025}

B. 3^{2025}

C. 4^{2025}

D. 5^{2025}

【例12】

A, B 是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的非空子集, 则满足 $A \cap B = \emptyset$ 的有序集合对 (A, B) 共有 _____ 个.

【随堂练习】

1. (2006 年全国统一高考 I 卷数学理科真题) 设集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 选择 I 的两个非空子集 A 和 B , 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 ()
- A. 50 种 B. 49 种 C. 48 种 D. 47 种
2. (2023 年全国高考甲卷数学试卷理科真题第 9 题) 有五名志愿者参加社区服务, 共服务星期六、星期天两天, 每天从中任选两人参加服务, 则两天中恰有 1 人连续参加两天服务的选择种数为 ()
- A. 120 B. 60 C. 40 D. 30
3. (2008 年全国统一高考 I 卷数学文科真题) 将 1, 2, 3 填入 3×3 的方格中, 要求每行、每列都没有重复数字, 下面是一种填法, 则不同的填写方法共有 ()

1	2	3
3	1	2
2	3	1

- A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 48 种

4. 设 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 若 $A \subseteq C \subseteq U$, $B \subseteq C \subseteq U$, 则不同的有序集合组 (A, B, C) 的总数是_____.

5. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, A, B 都是 U 的子集, 且满足: $A \cup B = U$, $A \cap B \neq \emptyset$, 则满足条件的不同集合对 (A, B) 共有_____对.

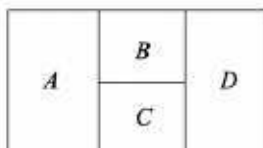
【课后巩固】

1. 如图, 甲开车从龙岗到南山, 假设一定要经过布吉, 已知从龙岗到布吉有三条路可选择, 从布吉到南山有两条路可选择, 甲共有()种走法.



- A. 5 B. 6 C. 4 D. 9

2. 如图, 用四种不同颜色给矩形 A 、 B 、 C 、 D 涂色, 要求相邻的矩形涂不同的颜色, 则不同的涂色方法共有 ()



- A. 12 种 B. 24 种 C. 48 种 D. 72 种

3. 已知两个非空集合 A 、 B 满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, 则符合条件的有序集合对 (A, B) 个数是

- ()
A. 6 B. 8 C. 25 D. 27

第八讲

排列组合初步

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.1.2.1 排列数、组合数的概念	1 星
核心精讲	5.1.2.2 特元特位	2 星
	5.1.2.3 相邻捆绑	2 星
拔高拓展	5.1.2.8 链状染色模型	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】排列

【例1】

请用乘法原理列式：

- (1) 将 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 七个数排成一列，共有_____种排法。
 (2) 从 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 七个数中选出 4 个排成一列，共有_____种排法。

【例2】

求解下列问题：

- (1) 计算： $\frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_8^8 - A_8^8}$ ；
 (2) 解方程： $A_n^2 = 7A_{n-4}^2$ 。

【例3】

7名学生按要求排成一排,分别有多少种排法?

- (1)甲乙二人不站在两端;
- (2)甲、乙、丙必须相邻;
- (3)7名学生中有4男3女,4名男生站在一起,3名女生要站在一起.

【核心精讲】 组合**【例4】**

请用乘法原理列式:

- (1)从1, 2, 3, 4, 5, 6, 7七个数中选出3个数取出(不计顺序),共有_____种选法.
- (2)从1, 2, 3, 4, 5, 6, 7七个数中选出4个数取出(不计顺序),共有_____种选法.

【例5】

(1) 计算 $C_{10}^4 - C_7^3 \times A_3^3$;

(2) 计算 $C_n^{3-n} + C_{n+1}^{n-1}$;

(3) 证明: $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

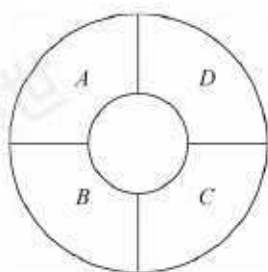
【例6】

(2023 年新高考 I 卷高考真题第 13 题) 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课, 学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课, 并且每类选修课至少选修 1 门, 则不同的选课方案共有 _____ 种(用数字作答).

【拔高拓展】染色问题

【例7】

(2008 全国 I 卷理科高考真题选择压轴 12 题) 如图, 一环形花坛分成 A, B, C, D 四块, 现有 4 种不同的花供选种, 要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为 ()



A. 96

B. 84

C. 60

D. 48

【例8】

五行是华夏民族创造的哲学思想，多用于哲学、中医学和占卜方面。五行学说是华夏文明重要组成部分。古代先民认为，天下万物皆由五类元素组成，分别是金、木、水、火、土，彼此之间存在相生相克的关系。如图是五行图，现有5种颜色可供选择给五“行”涂色，要求五行相生不能用同一种颜色（例如金生水，水生木，不能同色），五行相克可以用同一种颜色（例如水克火，木克土，可以用同一种颜色），则不同的涂色方法种数有（ ）



A. 3125

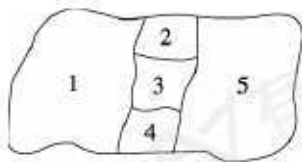
B. 1000

C. 1040

D. 1020

【例9】

在一个具有五个行政区域的地图上(如图)，用5种颜色给这五个行政区着色，若相邻的区域不能用同一颜色，则不同的着色方法共有（ ）



A. 420 种

B. 360 种

C. 540 种

D. 300 种

【随堂练习】

1. 计算 $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5}$ 的值是

A. 1

B. 0.6

C. 0.8

D. 1.2

2. $A_5^2 + C_6^3$ 的值为

A. 60

B. 40

C. 35

D. 20

3. 若 $C_{16}^m = C_{16}^{2m-2}$, 则 $C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_n^3$ 的值为

A. 14

B. 84

C. 34

D. 204

4. 已知 $C_{n+2}^n = 28$, 则 $n =$

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

5. 从 6 名运动员中选 4 人参加 4×100 米接力赛，在下列条件下，各共有多少种不同的排法？

(写出计算过程，并用数字作答)

(1) 甲、乙两人必须跑中间两棒；

(2) 若甲、乙两人都被选且必须跑相邻两棒。

6. 某学校为了了解学生参加体育运动的情况, 用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查, 拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生, 已知该校初中部和高中部分别有 400 名和 200 名学生, 则不同的抽样结果共有 ()

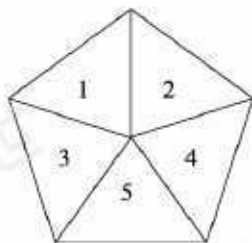
A. $C_{400}^{45} \cdot C_{200}^{15}$ 种

B. $C_{400}^{20} \cdot C_{200}^{40}$ 种

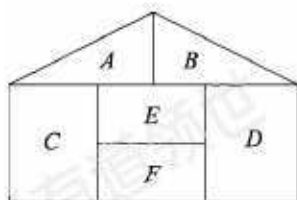
C. $C_{400}^{30} \cdot C_{200}^{30}$ 种

D. $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$ 种

7. 如图, 将标号为 1, 2, 3, 4, 5 的五块区域染上红、黄、绿三种颜色中的一种, 使得相邻区域(有公共边)的颜色不同, 则不同的染色方法有 _____ 种.

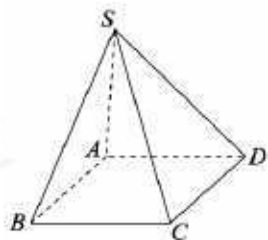


8. 用四种不同的颜色给如图所示的六块区域 A, B, C, D, E, F 涂色, 要求相邻区域涂不同颜色, 则涂色方法的总数是 ()



- A. 120 B. 72 C. 48 D. 24

9. 如图所示, 将四棱锥 $S-ABCD$ 的每一个顶点染上一种颜色, 并使同一条棱上的两端异色, 如果只有 4 种颜色可供使用, 则不同的染色方法种数为 ()



- A. 120 B. 96 C. 72 D. 48

【课后巩固】

1. (2006 年江西省高考数学文科真题)袋中有 40 个小球,其中红色球 16 个、蓝色球 12 个,白色球 8 个,黄色球 4 个,从中随机抽取 10 个球作成一样本,则这个样本恰好是按分层抽样方法得到的概率为 ()

A. $\frac{C_4^1 C_8^2 C_{12}^3 C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

B. $\frac{C_4^2 C_8^1 C_{12}^3 C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

C. $\frac{C_4^2 C_8^3 C_{12}^1 C_{16}^4}{C_{40}^{10}}$

D. $\frac{C_4^1 C_8^3 C_{12}^4 C_{16}^2}{C_{40}^{10}}$

2. (2014 年四川省高考数学理科真题)六个人从左至右排成一行,最左端只能排甲或乙,最右端不能排甲,则不同的排法共有 ()

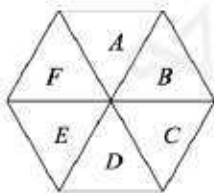
A. 192 种

B. 216 种

C. 240 种

D. 288 种

3. 在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物(如图),要求同一块中种同一种植物,相邻的两块种不同的植物.现有 4 种不同的植物可供选择,则有 _____ 种栽种方案.



第九讲

二项式定理初步

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	5.1.3.1 杨辉三角形的性质与二项展开式的通项 (提高、目标专属)	2 星
拔高拓展	5.1.3.2 二项式定理的系数和(提高、目标专属)	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】杨辉三角

【例1】

杨辉是我国南宋的一位杰出的数学家，在他所著的《详解九章算法》一书中，画的一张表示二项式展开后的系数构成的三角图形，称为“开方做法本源”。现在简称为“杨辉三角”。下面是 $(a+b)^n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，当 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时展开式的二项式系数表示形式，借助上面的表示形式，判断 λ 与 μ 的值分别是 ()

$(a+b)^1$		1	1					
$(a+b)^2$		1	2	1				
$(a+b)^3$		1	3	3	1			
$(a+b)^4$		1	4	λ	4	1		
$(a+b)^5$		1	5	μ	10	5	1	

A. 5, 9

B. 5, 10

C. 6, 9

D. 6, 10

【核心精讲】二项式定理

【例2】

$(x+7)^5$ 展开式中 x^3 项的系数是 ()

A. 245

B. 10

C. 49

D. 490

【例3】

$(1+\sqrt{x})^6$ 展开式中含 x^2 项的系数为 ()

A. 30

B. 24

C. 20

D. 15

【例4】

(2023 北京卷高考真题第5题) $(2x - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x 的系数是 ()

- A. -40 B. 40 C. -80 D. 80

【例5】

$(x-1)(\frac{1}{x}-2)^5$ 的展开式中的常数项是 ()

- A. -112 B. -48 C. 48 D. 112

【例6】

(2019 全国课标Ⅲ卷高考真题理科第4题) $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为 ()

- A. 12 B. 16 C. 20 D. 24

【例7】

$(x+y-1)^8$ 的展开式中, 含 xy^4 的项的系数为 ()

- A. 240 B. -280 C. 560 D. 360

【例8】

$(x^2 - \frac{1}{x} - 2)^5$ 的展开式中的常数项为 ()

- A. 120 B. 88 C. 24 D. 18

【例9】

$(1 + 2x + 3x^2)^5$ 展开式中 x^3 的系数为 ()

- A. 200 B. 230 C. 120 D. 180

【拔高拓展】 系数与二项式系数

【例7】

求二项式 $(2\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中第四项的二项式系数和第四项的系数.

【例8】

(2012 全国大纲卷高考真题理科第 15 题) 若 $(x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等, 则该展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为 _____.

【随堂练习】

1. 图1为二项式系数表, 史称“杨辉三角”, 是我国数学成果中的瑰宝之一, 图2为二项式系数表的某一个局部, 则 $a+b+c=$ _____.

				1				
			1		1			
		1		2		1		
		1	3		3	1		
	1		4	6		4	1	
1		5		10	10		5	1
1	6	15		20	15		6	1
	...	...	...	...	...	...	...	...

图1

210	a	210
	b	462
	c	

图2

2. (2024 北京卷高考真题第4题) 在 $(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式中, x^3 的系数为 ()
 A. 6 B. -6 C. 12 D. -12

3. (2024 天津卷高考真题第11题) 在 $(\frac{3}{x^2} + \frac{x^3}{3})^6$ 的展开式中, 常数项为 _____.

4. (2022 新高考 I 卷高考真题第13题) $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 _____
 (用数字作答).

5. $(x+y-1)^5$ 的展开式中所有二次项(即含 x^2 , xy , y^2 的项)的系数和为 ()

- A. -40 B. -20 C. 0 D. 40

6. $(2+x-x^2)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为 ()

- A. $-480x^4$ B. $-180x^4$ C. $60x^4$ D. $240x^4$

7. $(1-2x)^5$ 的展开式中, 二项式系数最大且系数较大的项的系数为 ()

- A. 40 B. -40 C. 80 D. -80

【课后巩固】

1. (2021 年上海市高考数学真题) 已知二项式 $(x+a)^5$ 展开式中, x^2 的系数为 80, 则 $a =$ _____.

2. 在 $x(1+x)^6$ 的展开式中, 含 x^4 项的系数为 ()

- A. 30 B. 20 C. 15 D. 10

3. $(1+2x)^7$ 的展开式中第 3 项的系数与二项式系数分别为 ()

- A. 84, 21 B. 21, 84 C. 35, 280 D. 280, 35

第十讲

综合复习



【例题精讲】

【拔高拓展】 导数

【例1】

记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $f(x) = 2xf'(3) + 3\ln x$ ，则 $f'(3) =$ ()

A. -1

B. 1

C. -3

D. 3

【例2】

已知 $f(x) = \ln x + f'(1)x^2 + 2x$ ，则 $f'(\frac{1}{2}) =$ ()

A. $2 - \ln 2$

B. 1

C. $1 + \ln 2$

D. 2

【例3】

探究下列函数及其导函数的对称性，你能发现什么结论？

(1) $f(x) = x^3 + 1$;

(2) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;

(3) $f(x) = x^3 + 3x + 1$.

【例4】

已知偶函数 $f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $x+2y+3=0$, 则 $y=f(x)$ 在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线方程为_____

【拔高拓展】 二次项系数和与赋值

【例5】

$(\frac{2}{x}-x)^n$ 展开式中的各二项式系数之和为 1024, 则 n 的值为 ()

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7

【例6】

在 $(3x+\frac{1}{x})^n$ 的展开式中, 各项系数和与二项式系数和之比为 64:1, 则展开式中常数项为 ()

A. 540

B. 480

C. 320

D. 160

【例7】

记 $(1+x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ ()

A. 64

B. 63

C. 32

D. 31

【例8】

(2022 北京卷高考真题第8题) 若 $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 =$ ()

A. 40

B. 41

C. -40

D. -41

【随堂练习】

1. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 3xf'(e) + \ln x$, 则 $f'(e) =$ ()

- A. $2e$ B. $-\frac{1}{2e}$ C. $\frac{1}{2e}$ D. $-2e$

2. (2010 江西卷高考真题文科第 4 题) 若 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 满足 $f'(1) = 2$, 则 $f'(-1) =$ ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

3. 已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(-1) = 1$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x - 1) + f(1)}{\Delta x} =$ ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

4. 设函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线的斜率为 10, 则

$$f'(-2) + f(-2) = \quad (\quad)$$

- A. -16 B. -6 C. 6 D. 16

5. 设 $(5x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式的各项系数之和为 M , 二项式系数之和为 N , 若 $M - N = 240$, 则 n

$$\text{的值为} \quad (\quad)$$

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

6. 设 $(x-1)^5(2x+1) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_6(x+1)^6$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_6$ 的值为_____.

【课后巩固】

1. 已知函数 $g(x)$ 为可导偶函数, $f(x) = g(x) + c$ (c 为常数), 若 $f'(1) = 2$, 则 $f'(-1) =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 2 D. 0

2. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2f'(1)\ln x$, 则 $f'(1) =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 2 D. 1

3. 若 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中所有项的系数之和为 64, 则展开式中的常数项为 ()

- A. 15 B. 20 C. 28 D. 35

第十一讲

导数运算与几何意义进阶

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	4.1.2.1 基本初等函数的导数及运算法则	1 星
	4.1.2.3 复合函数的导数	1 星
核心精讲	4.1.1.5 判断切线条数问题	3 星
拔高拓展	4.1.1.6 公切线问题(菁英专属)	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】

(一) 导数运算

【例1】

求出下列函数的导函数

$$(1) f(x) = x^3;$$

$$(2) f(x) = 2x^{-\frac{1}{2}};$$

$$(3) f(x) = \cos x;$$

$$(4) f(x) = \sin \frac{\pi}{3};$$

$$(5) f(x) = (x + \ln x)e^x;$$

$$(6) f(x) = x \ln x + 2^x;$$

$$(7) f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$$

(二) 复合函数求导

【例2】

求出下列函数的导函数

(1) $f(x) = \ln(-x)$;

(2) $f(x) = (\ln x)^2$

(3) (2016 北京卷理科高考真题第 18 题) $f(x) = xe^{a-x} + bx$

(4) $f(x) = e^{ax} \cdot \left(\frac{a}{x} + a + 1\right)$

【核心精讲】判断切线条数

【例3】

(2007 全国 II 卷理科高考真题第 22 题) 已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程;

(II) 设 $a > 0$. 如果过点 (a, b) 时作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a < b < f(a)$.

【例4】

若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = \ln x$ 的两条切线, 则 ()

- A. $\ln b < a$ B. $\ln a < b$ C. $0 < a < \ln b$ D. $0 < b < \ln a$

【例5】

(2018 清华大学领军计划自主选拔测试真题) $f(x) = (x-3)e^x$ 过点 $(0, a)$ 的切线有 3 条, 则 a 范围_____.

【拔高拓展】公切线问题

【例6】

若曲线 $y = \ln x$ 与曲线: $y = x^2 - k$ 有公切线, 则实数 k 的最大值为 ()

- A. $\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\ln 2$ B. $\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\ln 2$
C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ D. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

【例7】

若曲线 $C_1: y = x^2$ 与曲线 $C_2: y = \frac{e^x}{a} (a > 0)$ 存在公切线, 则实数 a 的取值范围 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, \frac{e^2}{4}]$ C. $[\frac{e^2}{4}, 2]$ D. $[\frac{e^2}{4}, +\infty)$

【例8】

已知 $f(x) = x + \frac{a}{x}$, 若 $y = f(x)$ 存在两条过 $(2, 0)$ 的切线, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ B. $(-4, 0)$
C. $(-\infty, -8) \cup (0, +\infty)$ D. $(-8, 0)$

【例9】

已知函数 $f(x) = ax^2 + 1 (a > 0)$, $g(x) = \ln x$, 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有两条公切线, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{2e^3})$ B. $(\frac{1}{2e^3}, \frac{1}{2e})$ C. $(\frac{1}{2e^3}, +\infty)$ D. $(\frac{1}{2e}, +\infty)$

【随堂练习】

1. 已知函数 $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$, 若过点 $P(1, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则 t 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{30})$

B. $(0, \frac{1}{29})$

C. $(0, \frac{1}{28})$

D. $(0, \frac{1}{27})$

2. (2010 湖北卷高考真题文科压轴第 21 题) 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + bx + c$, 其中 $a > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 1$.

(I) 确定 b, c 的值;

(III) 若过点 $(0, 2)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条不同切线, 求 a 的取值范围.

3. (2021 新高考 I 卷高考真题第 7 题) 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线, 则

()

A. $e^b < a$

B. $e^a < b$

C. $0 < a < e^b$

D. $0 < b < e^a$

4. 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = x - \frac{1}{x} (x > 0)$ 的两条切线, 则

()

A. $b > a > 0$

B. $a - \frac{1}{a} < b < 0 < a$

C. $0 < a - \frac{1}{a} < b < a$

D. $a > b > a - \frac{1}{a}$ 且 $a > 0$

5. (难题拓展)(2014 安徽卷高考真题文科填空压轴第 15 题)若直线 l 与曲线 C 满足下列两个条件:

(i) 直线 l 在点 $P(x_0, y_0)$ 处与曲线 C 相切;

(ii) 曲线 C 在点 P 附近位于直线 l 的两侧, 则称直线 l 在点 P 处“切过”曲线 C .

下列命题正确的是_____ (写出所有正确命题的编号).

① 直线 $l: y=0$ 在点 $P(0, 0)$ 处“切过”曲线 $C: y=x^3$

② 直线 $l: x=-1$ 在点 $P(-1, 0)$ 处“切过”曲线 $C: y=(x+1)^2$

③ 直线 $l: y=x$ 在点 $P(0, 0)$ 处“切过”曲线 $C: y=\sin x$

④ 直线 $l: y=x$ 在点 $P(0, 0)$ 处“切过”曲线 $C: y=\tan x$

⑤ 直线 $l: y=x-1$ 在点 $P(1, 0)$ 处“切过”曲线 $C: y=\ln x$.

【课后巩固】

1. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$, 若过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 则 t 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, -3)$

B. $(-3, -1)$

C. $(-1, +\infty)$

D. $(0, 1)$

2. 已知 $a > 0$, 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = x^3$ 的三条切线, 则 ()

A. $b < 0$

B. $0 < b < a^3$

C. $b > a^3$

D. $b(b - a^3) = 0$

第十二讲

函数的单调性进阶

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	4.1.4.1 不含参函数的单调性	1 星
核心精讲	4.1.4.2a 含参函数单调性讨论之可因式分解型(上)	2 星
	4.1.4.2b 含参函数单调性讨论之可因式分解型(下)	2 星
	4.1.4.3 含参函数单调性讨论之类二次型	3 星
拔高拓展	4.1.4.5 含参函数单调性讨论之超越函数(目标、菁英专属)	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】 不含参函数单调性

【例1】

设函数 $f(x) = 2x - \ln(x - a)$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a = -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

【例2】

已知函数 $f(x) = (x + a) \ln x - 2(x - 1)$.

(1) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

【核心精讲】 导数可因式分解型 + 类二次**【例3】**

(可因式分解)(2019 新课标 III 卷高考真题理科压轴第 20 题)已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

【例4】

(可因式分解)(2022-2023 学年广东省深圳中学高二(下)期中第 19 题)

若函数 $f(x) = x^3 + (a+2)x^2 + bx - a^2$.

(1)当 $b = -(a+2)^2$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

【例5】

(2023 年新高考 I 卷高考真题第 19 题) 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

【例6】

(2017 新课标 I 卷高考真题文科压轴第 21 题) 已知函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【拔高拓展】导数为超越函数

【例7】

(2008 南京大学自主招生选拔测试真题) 函数 $f(x) = e^x - \ln(1+x) + 2$ 单调减区间为 _____

【例8】

(2020 全国课标 II 卷高考真题文科压轴第 21 题) 已知函数 $f(x) = 2\ln x + 1$.

(1) 若 $f(x) \leq 2x + c$, 求 c 的取值范围;

(2) 设 $a > 0$, 讨论函数 $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 的单调性.

【随堂练习】

1. (2010 北京卷高考真题理科第 18 题) 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{k}{2}x^2$, $k \geq 0$.

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

2. (2021 新高考 II 卷高考真题解答压轴第 22 题) 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

3. (2016 新课标 I 卷高考真题文科压轴第 21 题) 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

4. (2020 新课标 III 卷高考真题文科压轴第 21 题) 已知函数 $f(x) = x^3 - kx + k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

5. (2016 北京卷理科高考真题第 18 题) 设函数 $f(x) = xe^{ax} + bx$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = (e-1)x + 4$,
- (I) 求 a, b 的值;
- (II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

【课后巩固】

1. (2017 新课标 III 卷文科高考真题第 21 题) 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

2. 已知函数 $f(x) = 2x \ln x - 3e^{x-2} + 1 + (2a-5)x^2$, $g(x) = ax \ln x + (a-3)x^2 + 1$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求函数 $g(x)$ 的单调性;

第十三讲

利用参变分离法研究零点与恒成立问题

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	4.2.3.1a 参变分离法(上)(提高专属)	4 星
	4.2.3.1b 参变分离法(下)(提高专属)	4 星
拔高拓展	4.2.1.2 参变分离法	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】函数零点问题(非求导型)

【例1】

若函数 $f(x) = (\frac{1}{3})^{|x|} + m - 1$ 至少有一个零点, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $m < 1$ B. $m \geq 1$ C. $0 \leq m < 1$ D. $0 \leq m \leq 1$

【例2】

如果函数 $f(x) = x^3 + x - m$ 在 $(2, 3)$ 上有零点, 则实数 m 的取值范围是_____.

【例3】

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x > 0 \\ -x^2 - 2x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 4)$ B. $(-\infty, 4]$ C. $[3, 4)$ D. $[3, 4]$

【核心精讲】参变分离法解决零点问题

【例4】

若函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 有且仅有一个零点, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

B. $(-\infty, -8) \cup (0, +\infty)$

C. $[0, 4]$

D. $(-8, 0)$

【例5】

已知函数 $f(x) = (2x+1)e^x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - kx$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恰有两个零点, 求 k 的取值范围.

【例6】

已知函数 $f(x) = -x^2 + \ln x - mx - e^2$ ，若 $f(x)$ 恰有两个零点，求 m 的取值范围.

【拔高拓展】参变分离法解决恒成立问题

【例7】

已知 $\forall x \in [1, 2]$ ， $x \ln x + ax + 2 \leq 0$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

【例8】

已知 a, x 是不为 1 的正数，若不等式 $x^{\frac{1}{x}} \geq a^{\frac{1}{a}}$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{e}]$

B. $[\frac{1}{e}, 1)$

C. $[\frac{1}{e}, 1) \cup (1, e)$

D. $[\frac{1}{e}, 1]$

第十三讲

【随堂练习】

1. 已知函数 $f(x) = e^x \cdot x^2 - b$ 有三个零点, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{4}{e^2})$ B. $(0, \frac{2}{e^2})$ C. $(-\infty, \frac{4}{e^2})$ D. $[0, \frac{2}{e^2})$

2. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x + 1$ 无零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a > e^{-1}$ B. $a > e^{-2}$ C. $a > e$ D. $a > e^2$

3. $\forall x \in \mathbf{R}$, 不等式 $(x^2 - x)e^x - ax + e \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{e}{2}, e]$ B. $[e, 2e]$ C. $[0, \frac{e}{2}]$ D. $[0, e]$

【课后巩固】

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x - a, & x < 1 \\ -a - x, & x \geq 1 \end{cases}$ 有且仅有两个零点, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\frac{1}{e}, 0)$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(-\frac{1}{e}, e)$ D. $(-\infty, e)$

2. 对任意 $x \in [-1, 1]$, 不等式 $2x^2 - 2x + 1 - 2m \geq 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{4}]$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}]$
C. $(-\infty, \frac{5}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

第十四讲

复杂恒成立问题

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	4.2.1.1 导数可因式分解型分类讨论	2 星
核心精讲	4.2.1.2 参变分离法	2 星



【例题精讲】

【核心精讲】端点恒成立

【例1】

(2006 全国 II 卷高考真题理科第 20 题/2025 安徽淮北市和淮南市高考一模第 18 题改) 设函数 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$, 若对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 则 a 的取值范围为_____.

【例2】

(2024 全国甲卷高考真题理科第 20 题改) 已知函数 $f(x) = (1-ax)\ln(1+x) - x$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 则 a 的取值范围为_____.

【例3】

(2017 全国课标 II 卷高考真题文科压轴 21 题) 设函数 $f(x) = (1-x^2)e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq ax+1$, 求 a 的取值范围.

【例4】

(2010 全国卷高考真题文科第 21 题改) 设函数 $f(x) = x(e^x - 1) - ax^2$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 则 a 的取值范围为_____.

【例5】

已知函数 $f(x) = [a(x-1) - 2\ln x]e^x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围为_____.

【例6】

已知函数 $f(x) = \ln x - (a+1)x + 1$, $g(x) = a(x^2 + 1)$. 当 $x \geq 1$ 时, $2f(x) + g(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为_____.

A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1]$ D. $[1, +\infty)$

【例7】

已知函数 $f(x) = (x-a)e^x + x + a$, ($a \in \mathbb{R}$), 若 $f(x) \geq 0$ 对于任意的 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 则 a 的取值范围为_____.

【例8】

(2019 全国课标 I 卷高考真题文科第 20 题) 已知函数 $f(x) = 2\sin x - x\cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

- (1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点;
- (2) 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

【例9】

已知不等式 $(1-x^2)e^x \leq ax+1$, 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- ()
- A. $[0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

【例10】

已知函数 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 2$. 若对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) > (\frac{1}{2} - a)x^2 - 1$ 恒成立, 则 a 的取值范围为_____.

【拔高拓展】 幂指恒成立

【例11】

已知函数 $f(x) = e^x - x$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为

- ()
- A. $\frac{1}{e}$ B. 1 C. $e-1$ D. e

【例12】

若对任意 $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2-2} > x + \log_2 a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- ()
- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, \frac{1}{2}]$ C. $(0, 8)$ D. $(0, 8]$

【例13】

若不等式 $xe^x - x - \ln x - a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, e-1]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, e-1]$

【例14】

已知函数 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x} + \ln x - ax$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{e}]$ B. $(\frac{1}{e}, 1]$ C. $(-\infty, \frac{1}{e^2}]$ D. $(-\infty, 1]$

【例15】

若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $e^x - 1 \leq \frac{a + \ln x}{x}$ 成立, 则实数 a 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{e}$ B. 1 C. 2 D. e

【随堂练习】

1. 已知函数 $f(x) = kx - x^2 \ln x$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) < -x^2$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 0)$

B. $(-\infty, 0]$

C. $(-\infty, -1)$

D. $(-\infty, -1]$

2. (2015 山东卷高考真题理科第 21 题/2022 天津高考一模第 20 题改)

设函数 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 若 $\forall x > 0$, $f(x) \geq 0$ 成立, 则 a 的取值范围为 _____.

3. 已知当 $x > 0$ 时, $e^{1/x} - x \ln x \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 1]$

B. $(1, e^2]$

C. $(-\infty, 2]$

D. $[e, +\infty)$

【课后巩固】

1. 已知 $f(x) = e^{2x} + e^x - ax$, 对任意实数 $x \geq 0$, 均有 $f(x) \geq 2$, 则实数 a 的取值范围是

- ()
- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 3]$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-\infty, 3)$

2. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$ 满足 $e^{x+2} > x - 1$, 则实数 a 的取值范围是

- ()
- A. $-1 < a < 0$ B. $a \leq -2$ C. $-e < a < -2$ D. $a > -2$

第十五讲

导数选择填空提升

模块	相关知识视频	难度
核心精讲	4.1.2.4 导数的原函数构造	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】函数性质综合

【例1】

设函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是奇函数, 且在 $(-1, 1)$ 上是减函数, 若 $f(1-m) + f(-m) < 0$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(-1, 1)$

C. $(-1, \frac{1}{2})$

D. $(-1, 0) \cup (1, \frac{1}{2})$

【例2】

设 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则满足 $f(x) < f(x-2)$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-2, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(1, +\infty)$

【例3】

已知函数 $f(x) = \lg(|x| - 1) + 2023^x + 2023^{-x}$, 则使不等式 $f(3x) < f(x+1)$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

D. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

【核心精讲】构造原函数常规方法

【例4】

定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) > 2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 且 $f(1) = 3$, 则不等式 $f(x) > 2x + 1$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

【例5】

设 $f(x)$ 的定义在 R 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) + xf'(x) > 0$, 若 $a = f(1)$, $b = 2f(2)$, $c = 3f(3)$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

【例6】

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x) - f'(x) < 1$, $f(0) = 2021$, 则不等式 $f(x) > 2020 \cdot e^x + 1$ (e 为自然对数的底数) 解集为 ()

- A. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ B. $(2020, +\infty)$
C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (2020, +\infty)$

【例7】

设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ 的导函数, $f(-1)=0$, 当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)<0$, 则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【例8】

已知函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的导函数, 且满足 $x>0$ 时, $\ln x \cdot f'(x) + \frac{1}{x}f(x) < 0$, 则不等式 $(x-985)f(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(985, +\infty)$ B. $(-985, 985)$
C. $(-985, 0)$ D. $(0, 985)$

【例9】

已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 当 $x>0$ 时, $xf'(x) + 2f(x) > 0$. 若 $f(2)=0$, 则不等式 $x^3f(x) > 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【拔高拓展】奇偶性+单调性(高三二轮)

【例10】

已知 $f'(x)$ 是定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数, 对于任意的实数 x , 都有 $f(x) = \frac{f(-x)}{e^x}$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) + f'(x) > 0$. 若 $f(a+1) \geq e^{2a-1} f(3a)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$

B. $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

C. $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$

D. $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

【例11】

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $\sin 2x - f'(x) > 0$, 且 $\forall x \in R, f(-x) + f(x) - 2 \sin^2 x = 0$, 则下列说法一定正确的是 ()

A. $f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2}$

B. $f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{\pi}{4}) < \frac{1}{4}$

C. $f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{3\pi}{4}) < \frac{1}{4}$

D. $f(\frac{\pi}{3}) - f(-\frac{3\pi}{4}) > \frac{1}{4}$

【例12】

设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(x)$, 对任意的 $x \in R$, 有 $f(x) - f(-x) = 2 \sin x$, 且在 $[0, +\infty)$ 上 $f'(x) > \cos x$. 若 $f(\frac{\pi}{2} - t) - f(t) > \cos t - \sin t$, 则实数 t 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, \frac{\pi}{4})$

B. $(\frac{\pi}{4}, +\infty)$

C. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

D. $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$

【随堂练习】

1. 若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 则不等式 $f(x) + f(x-2) \geq 0$ 的解集为 ()

A. $[1, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(-\infty, 2]$

D. $(-\infty, 1]$

2. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + x$, 若 $f(2x-1) + f(2-x) > 0$, 则 x 的取值范围是_____.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f'(x) > 1$, $f(1) = -1$, 则 $f(x) > x-2$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, 1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1)$

D. $(-1, +\infty)$

4. 函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(0) = 2$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + f'(x) > 1$, 则不等式 $e^x f(x) > e^x + 1$ 的解集为 ()
- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
5. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, 且 $f'(x) > f(x)$, 对于任意 $a > 0$, 下面不等式恒成立的是 ()
- A. $f(a) < e^a f(0)$ B. $f(a) > e^a f(0)$
C. $f(a) < \frac{f(0)}{e^a}$ D. $f(a) > \frac{f(0)}{e^a}$
6. 已知偶函数 $f(x)$ ($x \neq 0$) 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) < -2f(x)$, 则使 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围为 ()
- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (0, 1)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
7. 设 $f'(x)$ 为奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, $f(-2) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - 3f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
C. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

【课后巩固】

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-5, 5)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且 $f(x) + xf'(x) > 2$, 则不等式 $(2x-3)f(2x-3) - (x-1)f(x-1) > 2x-4$ 的解集是 ()

A. $(2, +\infty)$ B. $(2, 6)$ C. $(-4, 6)$ D. $(2, 4)$

2. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足, $2f(x) + f'(x) > 0$ 且有 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{e}$, 则 $f(x) > \frac{1}{e^{2x}}$ 的解集为 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, +\infty)$

3. 若可导函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, 有 $\ln x \cdot f'(x) + \frac{1}{x} \cdot f(x) < 0$, 则不等式 $(x-2) \cdot f(x) > 0$ 的解集为 ()

A. $(-2, 0)$ B. $(0, 2)$ C. $(-2, 2)$ D. $(2, +\infty)$

第十六讲

排列组合(1)

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.1.2.2 特元特位	2 星
	5.1.2.3 相邻捆绑	2 星
核心精讲	5.1.2.4 插空法模型	2 星
	5.1.2.6 定序与部分元素相同模型(提高、目标专属)	2 星
拔高拓展	5.1.2.8 链状染色模型	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】 特元特位与相邻捆绑

【例1】

6个人站在一排，分别求出在下列情况中各有多少种不同排法？

- (1) 甲不站右端，也不站左端；
- (2) 甲、乙站在左、右两端；
- (3) 甲不站在左端，乙不站在右端；
- (4) 甲乙相邻.

【例2】

(2014 四川卷高考真题理科第6题) 六个人从左至右排成一行，最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 ()

- A. 192 种 B. 216 种 C. 240 种 D. 288 种

【核心精讲】不相邻问题与定序问题**【例3】**

某小区有排成一排的7个车位,求满足下列条件的停车方法数:

- (1) 现有3辆不同的车需要停放,要求3辆车连在一起;
- (2) 现有3辆不同的车需要停放,要求3辆车彼此不相邻;
- (3) 现有4辆不同的车需要停放,要求剩余的3个车位连在一起;
- (4) 现有4辆不同的车需要停放,要求剩余的3个车位彼此不相邻.

【例4】

将A、B、C、D、E、F六个字母排成一排,若A、B、C均互不相邻,则不同的排法有_____种.(用数字作答)

【例5】

甲、乙、丙、丁四个学生站成一排照相,要求学生甲必须站在学生乙的左边(两人可以不相邻),则不同的站法有 ()

- A. 24 种 B. 12 种 C. 18 种 D. 9 种

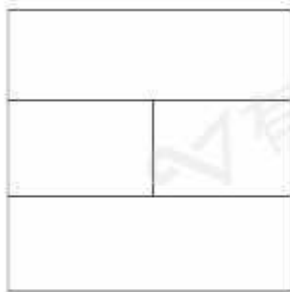
【例6】

(2013 浙江卷高考真题理科第 14 题)将 A, B, C, D, E, F 六个字母排成一排,且 A, B 均在 C 的同侧,则不同的排法共有 _____ 种.(用数字作答)

【拔高拓展】染色问题

【例7】

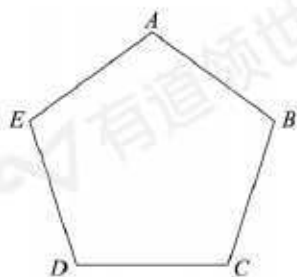
如图,现要用四种不同的颜色,对四边形中的四个区域进行着色,要求有公共边的两个区域不能用同一种颜色,则不同的着色方法数为 ()



- A. 48 B. 36 C. 42 D. 32

【例8】

如图, 正五边形 $ABCDE$ 中, 若把顶点 A, B, C, D, E 染上红、黄、绿、三种颜色中的一种, 使得相邻顶点所染颜色不相同, 则不同的染色方法共有 ()



A. 30 种

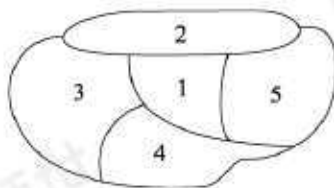
B. 27 种

C. 24 种

D. 21 种

【例9】

如图所示, 相邻区域不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则涂满所有区域的不同的着色方法共有 _____ 种. (用数字填写答案)



【例10】

某情报站有 A, B, C, D 四种互不相同的密码, 每周使用其中的一种密码, 且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种. 设第 1 周使用 A 种密码, 那么第 7 周也使用 A 种密码的概率是 _____ . (用最简分数表示)

【随堂练习】

1. (2007 北京卷高考真题理科第 5 题) 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照, 要求排成一排, 2 位老人相邻但不排在两端, 不同的排法共有 ()
- A. 1440 种 B. 960 种 C. 720 种 D. 480 种
2. (2012 辽宁卷高考真题理科第 5 题) 一排 9 个座位坐了 3 个三口之家. 若每家人坐在一起, 则不同的坐法种数为 ()
- A. $3 \times 3!$ B. $3 \times (3!)^3$ C. $(3!)^4$ D. $9!$
3. 一面国旗燃起青春的向往, 一身戎装肩负国家的担当. 6 名学生(含甲、乙)决定参军报国, 不负韶华, 报名前 6 人排成一排拍照, 则甲、乙两人不相邻的不同的排法有 ()
- A. 960 种 B. 480 种 C. 288 种 D. 144 种

4. 将甲、乙、丙等六位同学排成一排, 且甲、乙在丙的两侧, 则不同的排法种数共有

()

A. 480 B. 360 C. 120 D. 240

5. 现有五人并排站成一排, 若甲与乙不相邻, 并且甲在乙的左边, 则不同的安排方法共有

()

A. 128 种 B. 36 种 C. 72 种 D. 84 种

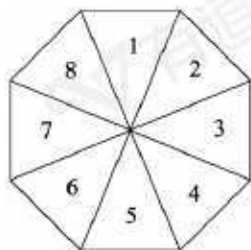
6. 如图, 湖北省分别与湖南、安徽、陕西、江西四省交界, 且湘、皖、陕互不交界, 在地图上分别给各省地域涂色, 要求相邻省涂不同色, 现有 4 种不同颜色可供选用, 则不同的涂色方案数为

()



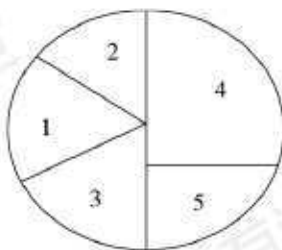
A. 96 B. 144 C. 480 D. 600

7. 中国是最早发明雨伞的国家, 伞是中国劳动人民一个重要的创造. 如图所示的雨伞, 其伞面被伞骨分成 8 个区域, 每个区域分别印有数字 1, 2, 3, ..., 8. 现准备给该伞面的每个区域涂色, 要求每个区域涂一种颜色, 相邻两个区域所涂颜色不能相同, 对称的两个区域(如区域 1 与区域 5)所涂颜色相同. 若有 6 种不同颜色的颜料可供选择, 则不同的涂色方案有 ()



- A. 550 种 B. 630 种 C. 720 种 D. 840 种

8. 给图中五个区域染色, 有 4 种不同的颜色可供选择, 要求有公共边的区域染上不同的颜色, 则不同的染色方法有 ()



- A. 216 种 B. 192 种 C. 180 种 D. 168 种

【课后巩固】

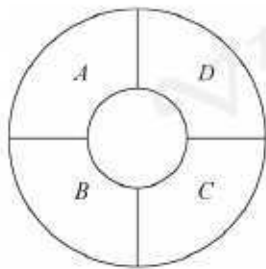
1. 某班新年联欢会原定的5个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个新节目插入原节目单中, 且两个新节目不相邻, 那么不同插法的种数为 ()

A. 6 B. 12 C. 15 D. 30

2. 6月, 也称毕业月, 高三的同学们都要与相处了三年的同窗进行合影留念. 现有4名男生、2名女生照相合影, 若男生甲不站两端且女生必须相邻, 则有 () 种排法.

A. 120 B. 144 C. 192 D. 240

3. (2008 全国 I 卷高考真题理科第 12 题) 如图, 一环形花坛分成 A, B, C, D 四块, 现有 4 种不同的花供选种, 要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为 ()



A. 96 B. 84 C. 60 D. 48

第十七讲

排列组合(2)

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.1.2.5a 分组分配模型(上)	3 星
核心精讲	5.1.2.5b 分组分配模型(下)	3 星
拔高拓展	5.1.2.9 间接计数模型与容斥原理(提高、目标专属)	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】 分组分配基础

【例1】

将6本不同的书分成三堆，各有多少种方法？

- (1) 一份1本，一份2本，一份3本；
- (2) 每份2本；
- (3) 一份4本，其余两份都是1本；
- (4) 分给甲乙丙三人，甲得1本，乙得2本，丙得3本；
- (5) 分给甲、乙、丙三人，一人1本，一人2本，一人3本；
- (6) 平均分给甲、乙、丙三人；
- (7) 分给甲、乙、丙三人，甲得4本，乙丙各得1本。

【例2】

2025年5月实验中学要给三个班级补发8套教具,先将其分成3堆,其中一堆4个,另两堆每堆2个,一共有多少种不同分堆方法 ()

A. $C_8^4 C_4^2 C_2^2$

B. $C_3^1 C_8^2$

C. $\frac{C_8^4 C_4^2}{A_2^2}$

D. $\frac{C_8^4 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$

【例3】

(2017全国课标Ⅱ卷高考真题理科第6题)安排3名志愿者完成4项工作,每人至少完成1项,每项工作由1人完成,则不同的安排方式共有 ()

A. 36种

B. 24种

C. 18种

D. 12种

【核心精讲】 分组分配进阶练习

【例4】

(2020山东卷(新高考Ⅰ卷)高考真题第3题)6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者,每名同学只去1个场馆,甲场馆安排1名,乙场馆安排2名,丙场馆安排3名,则不同的安排方法共有 ()

A. 120种

B. 90种

C. 60种

D. 30种

【例5】

将8个不同的小球放入3个不同的小盒,要求每个盒子中至少有一个球,且每个盒子里的球的个数都不同,则不同的放法有()种.

- A. 2698 B. 2688 C. 1344 D. 5376

【例6】

(1) 登山运动员10人,平均分为两组,其中熟悉道路的4人,每组都需要2人,那么不同的分配方法种数是 ()

- A. 30 B. 60 C. 120 D. 240

(2) 把10名登山运动员,平均分为两组先后登山,其中熟悉道路的有4人,每组都需要2人,那么不同的安排方法的种数是 ()

- A. 30种 B. 60种 C. 120种 D. 240种

【例7】

(2010 全国大纲Ⅱ卷高考真题理科第6题)将标号为1, 2, 3, 4, 5, 6的6张卡片放入3个不同的信封中, 若每个信封放2张, 其中标号为1, 2的卡片放入同一信封, 则不同的方法共有

- ()
- A. 12 种 B. 18 种 C. 36 种 D. 54 种

【例8】

现安排7名同学去参加5个运动项目, 要求甲、乙两同学不能参加同一个项目, 每个项目都有人参加, 每人只参加一个项目, 则满足上述要求的不同安排方案数为_____. (用数字作答)

【例9】

(2014 浙江卷高考真题理科第14题)在8张奖券中有一、二、三等奖各1张, 其余5张无奖, 将这8张奖券分配给4个人, 每人2张, 不同的获奖情况有_____种(用数字作答).

【拔高拓展】间接计数

【例10】

三名同学去参加甲、乙、丙、丁四个不同的兴趣小组，去哪个兴趣小组可以自由选择，但甲小组至少有一人参加，则不同的选择方案共有 ()

- A. 16 种 B. 18 种 C. 37 种 D. 48 种

【例11】

(2013 山东卷高考真题理科第 10 题) 用 0, 1, 2, ..., 9 十个数字，可以组成有重复数字的三位数的个数为 ()

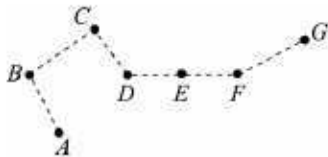
- A. 243 B. 252 C. 261 D. 279

【例12】

(2018 全国课标 I 卷高考真题理科第 15 题) 从 2 位女生，4 位男生中选 3 人参加科技比赛，且至少有 1 位女生入选，则不同的选法共有 _____ 种。(用数字填写答案)

【例13】

北斗七星是夜空中的七颗亮星，它们组成的图形象我国古代舀酒的斗，故命名为北斗七星。北斗七星不仅是天上的星象，也是古人判断季节的依据之一。如图，用点 A, B, C, D, E, F, G 表示某季节的北斗七星，其中 B, D, E, F 看作共线，其他任何三点均不共线。若过这七个点中任意三点作三角形，则所作的不同三角形的个数为 _____。



【课后巩固】

1. 有 12 本不同的书.

(1) 分给甲、乙、丙、丁四人, 每人 3 本, 有几种分法?

(2) 若 4 堆依次为 1 本, 3 本, 4 本, 4 本, 有几种分法?

(3) 若平均分成 3 堆, 有几种方法(只要求列出算式)?

第十八讲

二项式定理进阶

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.1.3.1 杨辉三角形的性质与二项展开式的通项(提高、目标专属)	2 星
	5.1.3.2 二项式定理的系数和(提高、目标专属)	2 星
核心精讲	5.1.3.3 换元法与多项式展开(目标专属)	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】二项式定理基础

【例1】

(2025 天津卷高考真题第11题)在 $(x-1)^6$ 的展开式中, x^3 项的系数为_____ (用数字作答).

【例2】

$(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^{2023}$ 的展开式中的常数项是 ()

A. 第673项

B. 第674项

C. 第675项

D. 第676项

【例3】

(2025 上海卷高考真题第6题)已知 $(x + \frac{a}{x})^6$ 的展开式中常数项是20,则 $a =$ _____.

【例4】

【难题拓展】(2024 全国甲卷高考真题理科第13题)二项式 $(\frac{1}{3} + x)^{10}$ 的展开式中,各项系数的最大值是_____.

【核心精讲】多项式展开

【例5】

(2022 新高考 I 卷高考真题第 13 题) $(1 - \frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 _____
(用数字作答).

【例6】

(2020 全国课标 I 高考真题理科第 8 题) $(x + \frac{y^2}{x})(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为

A. 5

B. 10

C. 15

D. 20

【例7】

$(x+y+1)^6$ 的展开式中 x^3y^2 项的系数为

A. 120

B. 90

C. 60

D. 45

【例8】

$(2+x-x^2)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为

A. $-480x^4$ B. $-180x^4$ C. $60x^4$ D. $240x^4$

【拔高拓展】二项式的赋值与配凑

【例9】

已知 $(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_7x^7$, 则

- (1) $a_0 =$ _____ ;
 (2) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 =$ _____ ;
 (3) $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_7 =$ _____ ;
 (4) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 =$ _____ ;
 (5) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 7a_7 =$ _____ .

【例10】

(2024 上海卷高考真题第6题) 在 $(x+1)^n$ 的二项展开式中, 若各项系数和为 32, 则 x^2 项的系数为 _____.

【例11】

(2025 北京卷高考真题第12题) 已知 $(1-2x)^4 = a_0 - 2a_1x + 4a_2x^2 - 8a_3x^3 + 16a_4x^4$, 则 $a_0 =$ _____ ; $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$ _____.

【随堂练习】

1. 在 $(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})^4$ 的展开式中, x^3y^3 的系数是 ()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2. $(\frac{1}{x^2} - 2)(1+x)^5$ 的展开式中的常数项是 ()
 A. 12 B. 8 C. -8 D. -12

3. 在 $(x+1-\frac{2}{x^2})^6$ 的展开式中常数项为 ()
 A. 721 B. -61 C. 181 D. -59

4. 已知 $(4x+a)(1-2x)^4$ 的所有项的系数和为 5, 则 x^2 的系数为 ()
 A. -32 B. -8 C. 24 D. 48

5. (2022 浙江卷高考真题第 12 题) 已知多项式 $(x+2)(x-1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$,
 则 $a_2 =$ _____, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ _____.

【课后巩固】

1. 多项式 $(x - \frac{2}{x})^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数是 ()

- A. 35 B. 280 C. -35 D. -280

2. $(1 + \frac{1}{a^2})(1 + a)^5$ 的展开式中 a^2 的系数为 ()

- A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

3. 已知 $(x-1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} =$ ()

- A. -10 B. 101 C. 1 D. -1

第十九讲

条件概率和全概率公式

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.2.1.1 用排列组合计算古典概型的相关问题	2 星
	5.2.1.2 概率的乘法原理	2 星
核心精讲	5.2.1.3 条件概率公式的概念与应用	2 星
拔高拓展	5.2.1.4 全概公式(菁英专属)	3 星



【例题精讲】

【基础巩固】 古典概型与概率乘法原理

【例1】

(2021 课标甲卷高考真题理科第 10 题) 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{4}{5}$

【例2】

(2020 江苏卷高考真题理科第 4 题) 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次, 观察向上的点数, 则点数和为 5 的概率是_____.

【核心精讲】 条件概率**【例3】**

从数字1~6中任选两个不同的数,枚举出所有可能的情况,然后:

(1)求较小的数字是3的概率;

(2)求两数之和是8的概率;

(3)求最小数字是3且两数之和为8的概率;

(4)若较小的数字是3,求两数之和为8的概率;

(5)若两数之和为8,求较小的数字是3的概率.

【例4】

(2022 天津卷高考真题第 13 题) 52 张扑克牌, 没有大小王, 无放回地抽取两次, 则两次都抽到 A 的概率为 _____; 已知第一次抽到的是 A, 则第二次抽取 A 的概率为 _____.

【例5】

(2023 年全国高考甲卷理科数学真题) 有 50 人报名足球俱乐部, 60 人报名乒乓球俱乐部, 70 人报名足球或乒乓球俱乐部, 若已知某人报足球俱乐部, 则其报乒乓球俱乐部的概率为

()

A. 0.8

B. 0.4

C. 0.2

D. 0.1

【拔高拓展】全概率公式与贝叶斯公式**【例6】**

袋中有4个形状质地完全相同的球,其中2个黑球2个白球.每次从袋中取出一个球,如果是黑球则放回袋中,如果是白球则不放回.

- (1)求两次均取出白球的概率;
- (2)求第二次取出的球是白球的概率;
- (3)已知第二次取出的是白球,求第一次取出的是白球的概率.

【随堂练习】

1. 甲乙丙三位同学之间相互踢毽子. 假设他们相互间传递毽子是等可能的, 并且由甲开始传, 则经过 3 次传递后, 毽子传到丙处的概率为_____.

2. (2023 新高考 II 卷高考真题多选压轴第 12 题) 在信道内传输 0, 1 信号, 信号的传输相互独立. 发送 0 时, 收到 1 的概率为 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 收到 0 的概率为 $1 - \alpha$; 发送 1 时, 收到 0 的概率为 $\beta (0 < \beta < 1)$, 收到 1 的概率为 $1 - \beta$. 考虑两种传输方案: 单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次, 三次传输是指每个信号重复发送 3 次. 收到的信号需要译码, 译码规则如下: 单次传输时, 收到的信号即为译码; 三次传输时, 收到的信号中出现次数多的即为译码 (例如, 若依次收到 1, 0, 1, 则译码为 1) ()
- A. 采用单次传输方案, 若依次发送 1, 0, 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1 - \alpha)(1 - \beta)^2$
- B. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2$
- C. 采用三次传输方案, 若发送 1, 则译码为 1 的概率为 $\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$
- D. 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时, 若发送 0, 则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

3. (2022 乙卷高考真题第 10 题) 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘, 各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3 , 且 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p , 则 ()
- A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关
B. 该棋手在第二盘与甲比赛, p 最大
C. 该棋手在第二盘与乙比赛, p 最大
D. 该棋手在第二盘与丙比赛, p 最大
4. (2014 新课标 II 卷高考真题第 5 题) 某地区空气质量监测资料表明, 一天的空气质量为优良的概率是 0.75, 连续两天为优良的概率是 0.6, 已知某天的空气质量为优良, 则随后一天的空气质量为优良的概率是 ()
- A. 0.8 B. 0.75 C. 0.6 D. 0.45
5. 有 3 台车床加工同一型号的零件, 第 1 台加工的次品率为 5%, 第 2 台加工的次品率为 4%, 第 3 台加工的次品率为 3%, 加工出来的零件混放在一起, 已知第 1, 2, 3 台车床加工的零件数的比为 5:7:8, 任取一个零件, 它是次品的概率为 _____; 如果取到的零件是次品, 则它是第 1 台车床加工的概率为 _____.

6. 甲、乙两个箱子里各装有 5 个大小形状都相同的球，其中甲箱中有 3 个红球和 2 个白球，乙箱中有 2 个红球和 3 个白球。先从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，再从乙箱中随机取出一球，则取出的球是红球的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{13}{30}$ C. $\frac{17}{30}$ D. $\frac{13}{25}$

7. 英国数学家贝叶斯(1701–1763)在概率论研究方面成就显著，创立了贝叶斯统计理论，对于统计决策函数、统计推断等做出了重要贡献。根据贝叶斯统计理论，事件 $A, B, \bar{A}$ (A 的对立事件) 存在如下关系： $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$ 。若某地区一种疾病的患病率是 0.01，现有一种试剂可以检验被检者是否患病，已知该试剂的准确率为 99%，即在被检验者患病的前提下用该试剂检测，有 99% 的可能呈现阳性；该试剂的误报率为 10%，即在被检验者未患病的情况下用该试剂检测，有 10% 的可能会误报阳性。现随机抽取该地区的一个被检验者，用该试剂来检验，结果呈现阳性的概率为 ()

A. 0.01 B. 0.0099 C. 0.1089 D. 0.1

8. (2022 新高考 I 卷高考真题第 20 题) 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事件“选到的人患有该疾病”, $\frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}$ 与 $\frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|A)}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标, 记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(A|\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)}$;

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$ 的估计值, 并利用(i)的结果给出 R 的估计值.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【课后巩固】

1. (2020 新课标 I 卷文科高考真题第 4 题) 设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 在 O, A, B, C, D 中任取 3 点, 则取到的 3 点共线的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{5}$

2. (2018 新课标 II 卷理科高考真题第 8 题) 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果, 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”, 如 $30 = 7 + 23$. 在不超过 30 的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于 30 的概率是 ()

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{14}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{1}{18}$

3. 2020 年 12 月 4 日是第七个“国家宪法日”. 某中学开展主题为“学习宪法知识, 弘扬宪法精神”的知识竞赛活动, 甲同学答对第一道题的概率为 $\frac{2}{3}$, 连续答对两道题的概率为 $\frac{1}{2}$. 用事件 A 表示“甲同学答对第一道题”, 事件 B 表示“甲同学答对第二道题”, 则 $P(B|A) =$ ()

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

4. (难题拓展) 托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes)在研究“逆向概率”的问题中得到了一个公式:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)},$$

这个公式被称为贝叶斯公式(贝叶斯定理), 其中 $P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$ 称为 B 的全概率. 这个定理在实际生活中有着重要的应用价值. 假设某种疾病在所有人群中的感染率是 0.1%, 医院现有的技术对于该疾病检测准确率为 99%, 即已知患病情况下, 99% 的可能性可以检查出阳性, 正常人 99% 的可能性检查为正常. 如果从人群中随机抽一个人去检测, 经计算检测结果为阳性的全概率为 0.01098, 请你用贝叶斯公式估计在医院给出的检测结果为阳性的条件下这个人得病的概率

- ()
- A. 0.1% B. 8% C. 9% D. 99%

第二十讲

离散型随机变量及其数字特征

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.2.2.1 随机变量的概念与简单分布列(提高专属)	1 星
核心精讲	5.2.3.1 期望	1 星
	5.2.3.2 方差与标准差	1 星
拔高拓展	5.2.3.3【数学思维】数字特征的意义与策略的应用 (目标、菁英专属)	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】 离散型随机变量及分布列的概念

【例1】

下列描述可以作为离散型随机变量的是_____

- (1) 从 10 名同学中任取一个, 这个同学的名字;
- (2) 某铅笔厂每日生产的所有铅笔中次品个数;
- (3) 连续抽出 10 张扑克牌, 其中的红桃牌张数;
- (4) 每次掷出纸飞机的飞行距离;
- (5) 每次掷出纸飞机的飞行距离(四舍五入后精确到厘米);
- (6) 在一场篮球比赛中, 得分最高的队员所得分数.

【例2】

- (1) 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k) = \frac{a}{5^k}$, a 为常数, $k=1, 2, 3$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) (2004 湖北卷高考真题理科第 13 题) 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k) = \frac{a}{5^k}$, a 为常数, $k=1, 2, \dots$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【核心精讲】 离散型随机变量的分布列、期望与方差**【例3】**

写出下列离散型随机变量的分布列,并求期望:

(1)从1~5中任选两个不同的数,其中较小的数字为随机变量 X ;

(2)掷一枚质地均匀的硬币3次,其中正面朝上的次数为随机变量 Y ;

(3)口袋中有大小形状相同的5个白球和3个黑球,从中任意取出2个球,其中白球个数为随机变量 Z ;

【例4】

(2017 天津卷高考真题理科第 16 题) 从甲地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

(I) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(II) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

【例5】

(2023 年华侨、港澳、台联考高考数学试卷) 盒中有 4 个球, 分别标有数字 1、1、2、3, 从中随机取 2 个球.

(1) 求取到 2 个标有数字 1 的球的概率;

(2) 设 X 为取出的 2 个球上的数字之和, 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

【例6】

(2021 新高考 II 卷高考真题第 9 题)(多选题)下列统计量中,能度量样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的离散程度的有 ()

- A. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的标准差
 B. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的中位数
 C. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的极差
 D. 样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数

【例7】

(2019 新高考浙江卷高考真题第 7 题)设 $0 < a < 1$. 随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0, 1)$ 内增大时, ()

- A. $D(X)$ 增大
 B. $D(X)$ 减小
 C. $D(X)$ 先增大后减小
 D. $D(X)$ 先减小后增大

【拔高拓展】 概率、期望与方差的性质应用

【例8】

(2014 浙江卷高考真题理科第9题) 已知甲盒中仅有1个球且为红球, 乙盒中有 m 个红球和 n 个蓝球($m \geq 3, n \geq 3$), 从乙盒中随机抽取 i ($i=1, 2$) 个球放入甲盒中.

(a) 放入 i 个球后, 甲盒中含有红球的个数记为 ξ_i ($i=1, 2$);

(b) 放入 i 个球后, 从甲盒中取1个球是红球的概率记为 p_i ($i=1, 2$).

则

A. $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$

B. $p_1 < p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$

C. $p_1 > p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$

D. $p_1 < p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$

【例9】

高考数学新课标 I 卷试题的第二部分为多选题, 每题设有4个选项, 其中正确选项的数量为2个或3个. 若正确答案共2个选项, 每选对1个得3分; 若正确答案共3个选项, 每选对1个得2分. 需要注意的是, 全部选对才能得6分, 一旦选中任何错误选项, 该题即得0分. 张三对其中的某题完全不会, 若该题共有三个正确选项的概率是 $\frac{2}{3}$, 记 X, Y, Z 分别为张三随机选择1个、2个、3个选项的得分, 则

A. $P(X=2) = \frac{1}{2}$

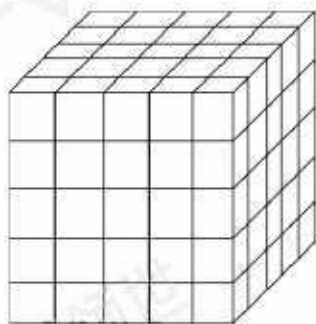
B. $P(Y=4) = P(X=3) + P(Z=6)$

C. $E(Z) < E(Y) < E(X)$

D. $D(Z) > D(Y) > D(X)$

【随堂练习】

1. (2013 湖北卷高考真题理科第 9 题) 如图, 将一个各面都涂了油漆的正方体, 切割为 125 个同样大小的小正方体, 经过搅拌后, 从中随机取一个小正方体, 记它的涂漆面数为 X , 则 X 的均值 $E(X) =$ ()



A. $\frac{126}{125}$

B. $\frac{6}{5}$

C. $\frac{168}{125}$

D. $\frac{7}{5}$

2. (2015 上海卷高考真题理科第 12 题) 赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金(单位: 元); 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金(单位: 元). 若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则 $E\xi_1 - E\xi_2 =$ _____ (元).

3. (2014 浙江卷高考真题理科第 12 题) 随机变量 ξ 的取值为 0, 1, 2, 若 $P(\xi=0) = \frac{1}{5}$, $E(\xi) = 1$, 则 $D(\xi) =$ _____.

4. (2020 新高考浙江卷高考真题第 16 题) 盒中有 4 个球, 其中 1 个红球, 1 个绿球, 2 个黄球. 从盒中随机取球, 每次取 1 个, 不放回, 直到取出红球为止. 设此过程中取到黄球的个数为 ξ , 则 $P(\xi=0) =$ _____, $E(\xi) =$ _____.

5. (2023 新高考 I 卷高考真题压轴第 21 题) 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i=1) = 1 - P(X_i=0) = q_i$, $i=1, 2, \dots$,

n , 则 $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y , 求 $E(Y)$.

【课后巩固】

1. (2010 湖北卷高考真题理科第 14 题) 某射手射击所得环数 ξ 的分布列如表, 已知 ξ 的期望 $E\xi = 8.9$, 则 y 的值为 _____.

ξ	7	8	9	10
P	x	0.1	0.3	y

2. (2010 上海卷高考真题理科第 6 题) 随机变量 ξ 的概率分布列由下图给出:

x	7	8	9	10
$P(\xi = x)$	0.3	0.35	0.2	0.15

则随机变量 ξ 的均值是 _____.

3. (2007 福建卷高考真题理科第 15 题) 两封信随机投入 A 、 B 、 C 三个空邮箱, 则 A 邮箱的信件数 ξ 的数学期望 $E\xi =$ _____.

第二十一讲

随机变量的经典分布

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.2.4.2 二项分布	2 星
核心精讲	5.2.4.3 超几何分布	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】二项分布

【例1】

(2016 四川卷高考真题理科第 12 题) 同时抛掷两枚质地均匀的硬币, 当至少有一枚硬币正面向上时, 就说这次试验成功, 则在 2 次试验中成功次数 X 的均值是_____.

【例2】

(2019 新课标 III 卷高考真题理科第 8 题) 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p , 各成员的支付方式相互独立. 设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数, $DX = 2.4$, $P(X=4) < P(X=6)$, 则 $p =$ ()

A. 0.7

B. 0.6

C. 0.4

D. 0.3

【核心精讲】超几何分布

【例3】

(2017 山东卷高考真题理科第 18 题)在心理学研究中,常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响,具体方法如下:将参加试验的志愿者随机分成两组,一组接受甲种心理暗示,另一组接受乙种心理暗示,通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用,现有 6 名男志愿者 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 和 4 名女志愿者 B_1, B_2, B_3, B_4 , 从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示,另 5 人接受乙种心理暗示.

(I)求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率,

(II)用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数,求 X 的分布列与数学期望 EX .

【拔高拓展】大数定律

【例4】

有甲、乙两个盒子，甲盒子里有1个红球，乙盒子里有3个红球和3个黑球，现从乙盒子里随机取出 $n(1 \leq n \leq 6, n \in \mathbb{N}^*)$ 个球放入甲盒子后，再从甲盒子里随机取一球，记取到的红球个数为 ξ 个，则随着 $n(1 \leq n \leq 6, n \in \mathbb{N}^*)$ 的增加，下列说法正确的是 ()

- A. $E\xi$ 增加, $D\xi$ 增加 B. $E\xi$ 增加, $D\xi$ 减小
C. $E\xi$ 减小, $D\xi$ 增加 D. $E\xi$ 减小, $D\xi$ 减小

【例5】

从一副不含大小王的扑克牌中抽牌，每次抽出1张牌，记录花色后放回，一共抽5次，记抽到黑桃牌 X 次，则 $E(X) =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【例6】

甲乙两个盒子中有若干个大小相同的球，甲盒子中有4个红球和2个白球，乙盒子中有3个红球和1个白球，同时从甲乙盒子中各取出两个球，并进行交换，交换后，记乙盒中红球个数为 ξ ，则 $E(\xi) =$ ()

- A. $\frac{11}{6}$ B. $\frac{13}{6}$ C. $\frac{17}{6}$ D. $\frac{19}{6}$

【随堂练习】

1. (2015 广东卷高考真题理科第 13 题) 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 若 $E(X) = 30$, $D(X) = 20$, 则 $p =$ _____.
2. (2017 新课标 II 卷高考真题理科第 13 题) 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次, X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX =$ _____.
3. (2013 清华大学“华约联盟”自主招生选拔测试真题) 袋中有 7 个红球, 8 个黑球, 从中一次取出 4 个.
 - (1) 求恰有 1 个红球的概率;
 - (2) 记取出黑球的个数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;
 - (3) 已知取出 4 个球同色, 求全为黑色的概率.

4. (2021 新高考浙江卷高考真题第 15 题) 袋中有 4 个红球, m 个黄球, n 个绿球. 现从中任取两个球, 记取出的红球数为 ξ , 若取出的两个球都是红球的概率为 $\frac{1}{6}$, 一红一黄的概率为

$\frac{1}{3}$, 则 $m - n =$ _____, $E(\xi) =$ _____.

5. 抛掷一枚骰子, 当出现 6 点时, 就说试验成功, 则在 30 次试验中成功的次数 X 的均值为

()

- A. 8 B. 10 C. 5 D. 6

6. 在规定时间内, 甲、乙、丙能正确解答某道题的概率分别为 0.5, 0.6, 0.4, 且这三个人是否能按时正确解答该题相互独立. 记甲、乙、丙三人中能按时正确解答该题的人数为 X , 则

$E(X) =$ _____ ()

- A. 1.8 B. 1.7 C. 1.6 D. 1.5

7. (多选) 甲袋中有 2 个红球、3 个黄球, 乙袋中有 3 个红球、2 个黄球, 同时从甲、乙两袋中取出 2 个球交换, 分别记交换后甲、乙两个袋子中红球个数的数学期望为 $E(X)$ 、 $E(Y)$, 方差为 $D(X)$ 、 $D(Y)$, 则下列结论正确的是 _____ ()

- A. $E(X) + E(Y) = 5$ B. $E(X) < E(Y)$
C. $D(X) < D(Y)$ D. $D(X) = D(Y)$

【课后巩固】

1. 请问区分二项分布和超几何分布最显著的特点差异是:

二项分布: _____

超几何分布: _____

2. (2009 辽宁卷高考真题理科第 19 题)某人向一目标射击 4 次, 每次击中目标的概率为 $\frac{1}{3}$.

(I) 设 X 表示目标被击中的次数, 求 X 的分布列及期望;

3. (2018 天津卷高考真题理科第 16 题) 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 24, 16, 16. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 人, 进行睡眠时间的调查.

(I) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?

(II) 若抽出的 7 人中有 4 人睡眠不足, 3 人睡眠充足, 现从这 7 人中随机抽取 3 人做进一步的身体健康检查.

(i) 用 X 表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量 X 的分布列与数学期望;

(ii) 设 A 为事件“抽取的 3 人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工”, 求事件 A 发生的概率.

第二十二讲

统计综合

模块	相关知识视频	难度
基础巩固	5.3.3.1 卡方独立性检验(提高、目标专属)	2 星
核心精讲	5.3.2.1 线性回归方程的计算(提高专属)	2 星
	5.3.2.2 非线性回归方程的计算(目标专属)	2 星



【例题精讲】

【基础巩固】独立性检验

【例1】

(2025 新高考 I 卷高考真题第 15 题) 为研究某疾病与超声波检查结果的关系, 从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人, 得到如下列联表:

超声波检查结果组别	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

- (1) 记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 P , 求 P 的估计值;
 (2) 根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【例2】

(2024 上海卷高考真题第 19 题) 为了解某地初中学生体育锻炼时长与学业成绩的关系, 从该地区 29000 名学生中抽取 580 人, 得到日均体育锻炼时长与学业成绩的数据如下表所示:

时间范围					
学业成绩	$[0, 0.5)$	$[0.5, 1)$	$[1, 1.5)$	$[1.5, 2)$	$[2, 2.5)$
优秀	5	44	42	3	1
不优秀	134	147	137	40	27

- (1) 该地区 29000 名学生中体育锻炼时长不少于 1 小时的人数约为多少?
- (2) 估计该地区初中学生日均体育锻炼的时长(精确到 0.1).
- (3) 是否有 95% 的把握认为学业成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时有关?

【例3】

(2024 全国甲卷理科第 17 题/文科第 18 题)某工厂进行生产线智能化升级改造,升级改造后,从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验,数据如下:

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1)填写如下列联表:

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异? 能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异?

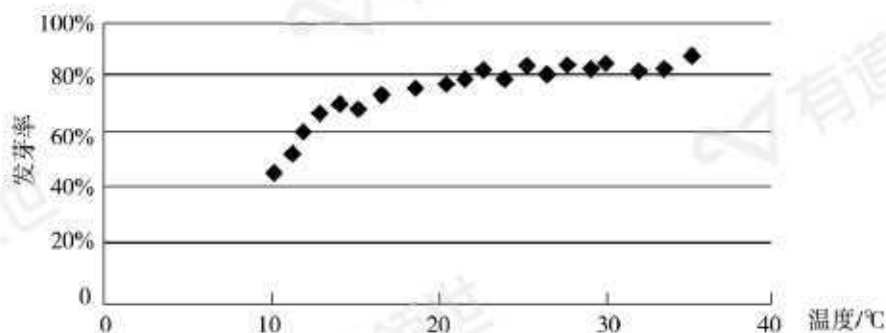
$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【核心精讲】线性与非线性回归方程

【例4】

(2020 新课标I卷高考真题文科第5题)某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的关系, 在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验, 由实验数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图:



由此散点图, 在 10°C 至 40°C 之间, 下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是 ()

A. $y = a + bx$

B. $y = a + bx^2$

C. $y = a + be^x$

D. $y = a + b \ln x$

【例5】

(2016 新课标Ⅲ卷高考真题文科第 18 题) 如图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.

注: 年份代码 1~7 分别对应年份 2008~2014.

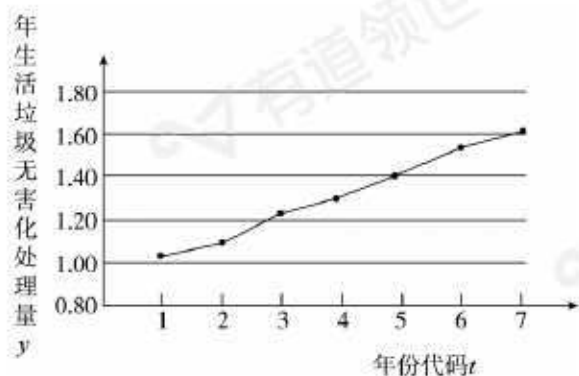
(Ⅱ) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量. 附注:

参考数据: $\sum_{i=1}^7 y_i = 9.32$, $\sum_{i=1}^7 t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$,

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$



【例6】

有一种速度叫中国速度,有一种骄傲叫中国高铁.高铁可以说是中国的一张行走的名片.截至2020年,中国高铁运营里程已经达到3.9万千米.2013年至2020年中国高铁每年的运营里程统计如下表,它反映了中国高铁的飞速发展.

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
年份代码 x	1	2	3	4	5	6	7	8
运营里程 y /万千米	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5	2.9	3.5	3.9

根据以上数据,回答下面的问题.

- (1)甲同学用曲线 $y = bx + a$ 来拟合,并算出相关系数 $r_1 = 0.97$;乙同学用曲线 $y = ce^{ax}$ 来拟合,并算出转化为线性回归方程所对应的相关系数 $r_2 = 0.99$.请判断哪一个更适合作为 y 关于 x 的回归方程类型,并说明理由.
- (2)根据(1)的判断结果及表中数据,求 y 关于 x 的回归方程.(系数精确到0.01)
- (3)请你利用得到的模型,预测2030年中国高铁的运营里程将达到多少万千米.

参考公式:用最小二乘法求线性回归方程的系数,公式为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$;

参考数据: $\bar{y} = 2.48$, $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 15.50$, $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 42.00$, 令 $w = \ln y$, $\bar{w} = 0.84$,

$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(w_i - \bar{w}) = 6.50$, $\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2 = 1.01$, $e^{0.14} \approx 1.15$, $e^{2.7} \approx 15$.

【随堂练习】

1. (2023 全国甲卷高考真题文科第 19 题) 一项试验旨在研究臭氧效应, 试验方案如下: 选 40 只小白鼠, 随机地将其中 20 只分配到试验组, 另外 20 只分配到对照组, 试验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境, 对照组的小白鼠饲养在正常环境, 一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量(单位: g), 试验结果如下:

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

15.2 18.8 20.2 21.3 22.5 23.2 25.8 26.5 27.5 30.1
32.6 34.3 34.8 35.6 35.6 35.8 36.2 37.3 40.5 43.2

试验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

7.8 9.2 11.4 12.4 13.2 15.5 16.5 18.0 18.8 19.2
19.8 20.2 21.6 22.8 23.6 23.9 25.1 28.2 32.3 36.5

- (2)(i) 求 40 只小白鼠体重的增加量的中位数 m , 再分别统计两样本中小于 m 与不小于 m 的数据的个数, 完成如下列联表;

	$< m$	$\geq m$
对照组		
试验组		

- (ii) 根据(i)中的列联表, 能否有 95% 的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

2. (2022 全国甲卷高考真题文科第 12 题) 甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营. 为了解这两家公司长途客车的运行情况, 随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次, 得到下面列联表:

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

- (2) 能否有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

3. (2020 新课标Ⅲ卷高考真题文科第 18 题) 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表(单位: 天):

锻炼人次空气 质量等级	$[0, 200]$	$(200, 400]$	$(400, 600]$
1(优)	2	16	25
2(良)	5	10	12
3(轻度污染)	6	7	8
4(中度污染)	7	2	0

- (3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 ≤ 400	人次 > 400
空气质量好		
空气质量不好		

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

4. 某医科大学实习小组为研究实习地昼夜温差与感冒人数之间的关系, 分别到当地气象部门和某医院抄录了1月至3月每月5日、20日的昼夜温差情况与因感冒而就诊的人数, 得到如表资料:

日期	1月5日	1月20日	2月5日	2月20日	3月5日	3月20日
昼夜温差 $x(^{\circ}\text{C})$	10	11	13	12	8	6
就诊人数 $y(\text{个})$	22	25	29	26	16	12

该小组确定的研究方案是: 先从这6组数据中随机选取4组数据求线性回归方程, 再用剩余的2组数据进行检验.

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

- (I) 求剩余的2组数据都是20日的概率;
 (II) 若选取的是1月20日、2月5日、2月20日、3月5日这4组数据.
 (i) 请根据这4组数据, 求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b} + \hat{a}$;
 (ii) 若某日的昼夜温差为 7°C , 请预测当日就诊人数. (结果保留整数).

5. 红铃虫是棉花的主要害虫之一, 其产卵数与温度有关. 现收集到一只红铃虫的产卵数 y (个) 和温度 x ($^{\circ}\text{C}$) 的 8 组观测数据, 制成图 1 所示的散点图, 现用两种模型① $y = e^{kx+d}$, ② $y = cx^2 + d$ 分别进行拟合, 由此得到相应的回归方程并进行残差分析, 进一步得到图 2 所示的残差图.

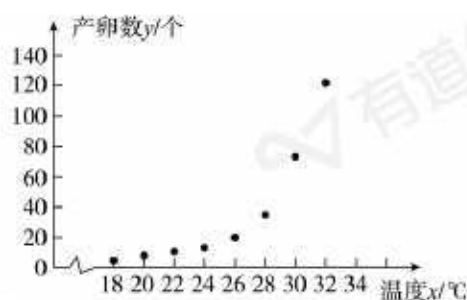


图1 产卵数散点图

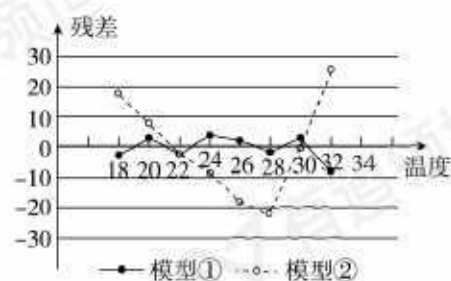


图2 两种模型的残差图

根据收集到的数据, 计算得到如下值: 表中 $z_i = \ln y_i$; $\bar{z} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 z_i$; $t_i = x_i^2$; $\bar{t} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 t_i$

$\bar{x}$	$\bar{z}$	$\bar{t}$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (t_i - \bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^8 (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})$	$\sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})$
25	2.9	646	168	422688	50.4	70308

- (1) 根据残差图, 比较模型①、②的拟合效果, 哪种模型比较合适?
 (2) 求出 y 关于 x 的回归方程. 附: 对于一组数据 $(\omega_1, v_1), (\omega_2, v_2), \dots, (\omega_n, v_n)$, 其回

$$\text{归直线 } \hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\omega \text{ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (\omega_i - \bar{\omega})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (\omega_i - \bar{\omega})^2},$$

$$\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{\omega}.$$

【课后巩固】

1. (2022 新高考 I 卷高考真题第 20 题) 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组), 同时从未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

第二十三讲

零轮复习之基本函数与运算



【例题精讲】

【基础巩固】 指对运算

【例1】

(2022 天津卷高考真题第6题) 化简 $(2 \log_3 3 + \log_3 3)(\log_3 2 + \log_3 2)$ 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

【例2】

(2021 天津卷高考真题第7题) 若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ ()

- A. -1 B. $\lg 7$ C. 1 D. $\log_7 10$

【例3】

设 a, b, c 均为正实数, 且 $3^a = 4^b = 6^c$, 那么 ()

- A. $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$ C. $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ D. $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

【例4】

若正数 a, b 满足 $\log_2 a = \log_3 b = \lg(a+b)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值为_____.

【例5】

正数 a, b 满足 $1 + \log_2 a = 2 + \log_3 b = 3 + \log_6(a+b)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【核心精讲】指对幂比大小

【例6】

(2024 天津卷高考真题第5题)若 $a = 4 \cdot 2^{-0.3}$, $b = 4 \cdot 2^{0.3}$, $c = \log_4 0.3$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

【例7】

(2021 新高考 II 卷高考真题第7题)已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_8 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

【例8】

(2020 新课标 III 卷文科高考真题第10题)设 $a = \log_5 2$, $b = \log_5 3$, $c = \frac{2}{3}$, 则 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【例9】

(2020 新课标 III 卷理科高考真题第12题)已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【拔高拓展】指对同构技巧

【例10】

(2013 新课标Ⅱ卷理科高考真题第8题) 设 $a = \log_3 6$, $b = \log_5 10$, $c = \log_7 14$, 则()

A. $c > b > a$

B. $b > c > a$

C. $a > c > b$

D. $a > b > c$

【例11】

设 $a = e$, $b = \frac{\sqrt{3}}{\ln \sqrt{3}}$, $c = \frac{2}{\ln 2}$, 则 a, b, c 大小关系是 ()

A. $a < c < b$

B. $b < c < a$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

【例12】

设 $a = \frac{4 - \ln 4}{e^2}$, $b = \frac{\ln 2}{2}$, $c = \frac{1}{e}$, 则 ()

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

【例 13】

(2022 甲卷文科高考真题第 12 题) 已知 $9^a = 10$, $a = 10^b - 11$, $b = 8^c - 9$, 则 ()

A. $a > 0 > b$

B. $a > b > 0$

C. $b > a > 0$

D. $b > 0 > a$

【例 14】

已知正实数 a, b 满足 $a + e^a = b + \ln b = 3$, 则 $2^{a+b} =$ _____.

【例 15】

若 x_1 是方程 $xe^x = e^2$ 的解, x_2 是方程 $x \ln x = e^2$ 的解, 则 $x_1 x_2 =$ _____.

【课后巩固】

1. (2024 甲卷理科高考真题第 15 题) 已知 $a > 1$, $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_4 a} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

2. (2022 天津卷高考真题第 5 题) 已知 $a = 2^{0.7}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.7}$, $c = \log_2 \frac{1}{3}$, 则 ()

A. $a > c > b$

B. $b > c > a$

C. $a > b > c$

D. $c > a > b$

3. 已知 $a - 4 = \ln \frac{a}{4} < 0$, $b - 3 = \ln \frac{b}{3} < 0$, $c - 2 = \ln \frac{c}{2} < 0$, 则 ()

A. $c < b < a$

B. $b < c < a$

C. $a < b < c$

D. $a < c < b$

【展望高三】

1. 已知实数 a, b , 满足 $a = \log_5 12 + \log_{12} 25$, $5^a + 12^a = 13^b$, 则 ()
 A. $a > b > 2$ B. $b > a > 2$ C. $a < b < 2$ D. $b < a < 2$
2. 已知三个互异的正数 a, b, c 满足 $c = 2\ln \frac{c}{a} + a$, $b = \log_{\frac{1}{e}}(2^a + 1)$, 则关于 a, b, c 下列判断正确的是 ()
 A. $a < b < c$ B. $a > b > c$
 C. $|a - c| < |b - 2|$ D. $|a - c| > |b - 2|$
3. 已知 a, b, c 满足 $a = \log_5(2^b + 3^b)$, $c = \log_5(5^b - 2^b)$, 则 ()
 A. $|a - c| \geq |b - c|$, $|a - b| \geq |b - c|$ B. $|a - c| \geq |b - c|$, $|a - b| \leq |b - c|$
 C. $|a - c| \leq |b - c|$, $|a - b| \geq |b - c|$ D. $|a - c| \leq |b - c|$, $|a - b| \leq |b - c|$
4. 已知 $2^a = 3$, $3^b = 4$, $a^c = b$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$
5. 设实数 a, b, c 都不为零, 且 $b = ae^a$, $c = be^b$, 则 ()
 A. $b > -\frac{1}{e}$ B. $c > -\frac{1}{4}$ C. $c > b > a$ D. $|c - b| > |b - a|$

6. 已知实数 a, b, c 满足 $c \ln a = c \cdot e^b = 1$, 则下列关系式中可能成立的是 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

7. (2021 课标乙卷高考真题理科选择压轴第 12 题) 设 $a = 2\ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

8. (2022 新高考 I 卷高考真题第 7 题) 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

9. 已知 $a = e^{\frac{1}{2023}}$, $b = \frac{2022}{2023}$, $c = 1 + \ln \frac{2022}{2023}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

10. 设 $a = \sin \frac{1}{4}$, $b = \sqrt[4]{e} - 1$, $c = \ln \frac{5}{4}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

第二十四讲

零轮复习之解不等式



【例题精讲】

【基础巩固】基本不等式

【例1】

若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 3$, 则 ab

()

A. 有最小值为 $\frac{3}{2}$ B. 有最大值为 $\frac{3}{2}$ C. 有最小值为 $\frac{9}{4}$ D. 有最大值为 $\frac{9}{4}$

【例2】

函数 $f(x) = 3 + x + \frac{9}{x} (x > 0)$ 的最小值为

()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【例3】

已知 $a, b > 0$ 且 $ab = 1$, 则 $(a+1)(b+1)$ 的最小值为

()

A. 4

B. 6

C. $2\sqrt{2}$

D. 8

【例4】

若 $a > 1$, 则 $a + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是

()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【例5】

已知 $a > 0, b > 0, \frac{1}{3b} + \frac{3}{a} = 1$, 则 $a + b$ 的最小值为 ()

- A. 4 B. $\frac{10+2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{10}{3} + 2\sqrt{3}$ D. $\frac{16}{3}$

【例6】

已知 $a > 0, b > 0$, 若 $a + \frac{2}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{b}{2}$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

【核心精讲】指对不等式

【例7】

已知 $f(x) = (\frac{1}{2})^x - 3$, 则 $f(x) < 5$ 的一个充分不必要条件是 ()

- A. $x > -4$ B. $x > -3$ C. $x > -2$ D. $x < -3$

【例8】

函数 $f(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ 的定义域为 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 1)$ C. $[0, 1)$ D. $[0, +\infty)$

【例9】

已知 $\log_a \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
 C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

【例10】

实数 a 满足: $\log_a 8 + \log_2 a < 4$, 且 $a > 1$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(1, 8)$ B. $(1, 4)$ C. $(2, 4)$ D. $(2, 8)$

【拔高拓展】特殊不等式

【例11】

(2013 江西卷高考真题文科第6题) 下列选项中, 使不等式 $x < \frac{1}{x} < x^2$ 成立的 x 的取值范围是

- ()
 A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【例 12】

(2012 重庆卷高考真题理科选择压轴第 10 题) 设平面点集 $A = \{(x, y) \mid (y-x)(y-\frac{1}{x}) \geq 0\}$,

$B = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 所表示的平面图形的面积为 ()

- A. $\frac{3}{4}\pi$ B. $\frac{3}{5}\pi$ C. $\frac{4}{7}\pi$ D. $\frac{\pi}{2}$

【例 13】

(2020 新高考北京卷高考真题第 6 题) 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是

- ()
- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

【例 14】

(2012 全国新课标卷高考真题文科第 11 题) 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $4^x < \log_a x$, 则 a 的取值范围是

- ()
- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, 2)$

【随堂练习】

1. (2023 上海卷高考真题第 6 题) 已知正实数 a, b 满足 $a+4b=1$, 则 ab 的最大值为 _____.

2. 已知 $a \geq 0$, 则 $a + \frac{16}{a+4}$ 的最小值为 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

3. 已知正数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$, 则 $2x+y$ 的最小值是 ()

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

4. 已知正实数 a, b 满足 $a+b=2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b+1}$ 最小值为 ()

A. $3\sqrt{3}$

B. 4

C. $2\sqrt{2}$

D. 3

5. 不等式 $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 < 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, \log_5 3)$ B. $(\log_5 3, +\infty)$ C. $(-1, \log_5 3)$ D. $(0, \log_5 3)$

6. 已知 $\log_a \frac{1}{3} > 1$ 且 $a^{\frac{1}{6}} < 1$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, \frac{1}{3})$ C. $(\frac{1}{3}, 1)$ D. $(0, \frac{1}{6})$

7. (2013 新课标 II 卷高考真题文科选择压轴第 12 题) 若存在正数 x 使 $2^x(x-a) < 1$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$
C. $(0, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

8. (2021 新高考浙江卷高考真题压轴第 22 题) 设 a, b 为实数, 且 $a > 1$, 函数

$$f(x) = a^x - bx + e^2 (x \in \mathbb{R}).$$

(II) 若对任意 $b > 2e^2$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, a 的取值范围为 ()

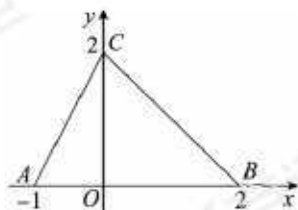
- A. $(1, e^2]$ B. $(1, e^2)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. $[e^2, +\infty)$

【课后巩固】

1. (2017 山东卷高考真题文科第 12 题) 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(1, 2)$, 则 $2a + b$ 的最小值为_____.

2. (2012 江苏卷高考真题第 5 题) 函数 $f(x) = \sqrt{1 - 2 \log_6 x}$ 的定义域为_____.

3. (2015 北京卷高考真题理科第 7 题) 如图, 函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB , 则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是 ()



A. $\{x \mid -1 < x \leq 0\}$

B. $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

C. $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$

D. $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$

第二十五讲

零轮复习之 逻辑转换化归能力



【例题精讲】

【基础巩固】逻辑推断与合情推理

【例1】

(2016 新课标Ⅱ卷理科高考真题第15题)有三张卡片,分别写有1和2,1和3,2和3.甲,乙,丙三人各取走一张卡片,甲看了乙的卡片后说:“我与乙的卡片上相同的数字不是2”,乙看了丙的卡片后说:“我与丙的卡片上相同的数字不是1”,丙说:“我的卡片上的数字之和不是5”,则甲的卡片上的数字是_____.

【例2】

(2017 新课标Ⅱ卷文科高考真题第9题)甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩,老师说:你们四人中有2位优秀,2位良好,我现在给甲看乙、丙的成绩,给乙看丙的成绩,给丁看甲的成绩,看后甲对大家说:我还是不知道我的成绩.根据以上信息,则

()

- A. 乙可以知道四人的成绩
B. 丁可以知道四人的成绩
C. 乙、丁可以知道对方的成绩
D. 乙、丁可以知道自己的成绩

【例3】

(2016 北京卷理科高考真题第8题)袋中装有偶数个球,其中红球、黑球各占一半.甲、乙、丙是三个空盒.每次从袋中任意取出两个球,将其中一个球放入甲盒,如果这个球是红球,就将另一个放入乙盒,否则就放入丙盒.重复上述过程,直到袋中所有球都被放入盒中,则

()

- A. 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球
B. 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多
C. 乙盒中红球不多于丙盒中红球
D. 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

【例4】

A、B、C、D、E五个队进行单循环赛(单循环赛制是指所有参赛队在竞赛中均能相遇一次),胜一场得3分,负一场得0分,平局各得1分.若A队2胜2负,B队得8分,C队得9分,E队胜了D队,则D队得分为_____.

【核心精讲】任意存在性命题

【例5】

已知函数 $f(x) = xe^x + 2a$, $g(x) = \frac{e \ln x}{x}$, 对任意 $x_1 \in [1, 2]$, $\exists x_2 \in [1, 3]$, 都有不等式 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[-e^2, +\infty)$

B. $[\frac{1-e}{2}, +\infty)$

C. $[-\frac{e}{2}, +\infty)$

D. $[\frac{1}{2} - e^2, +\infty)$

【例6】

已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x}$ ($a > 0$)

(1) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若存在 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【例7】

已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = \log_2 x + m$, 若对 $\forall x_1 \in [2, 4]$, $\exists x_2 \in [8, 16]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围为_____.

【例8】

已知函数 $f(x) = m(x-2) + 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, 若对任意 $x_1 \in [0, 4]$, 总存在 $x_2 \in [1, 4]$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-2, 2)$ B. $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\frac{3}{2}, +\infty)$

【课后巩固】

1. (2022 浙江卷高考真题第 4 题) 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 “ $\sin x = 1$ ” 是 “ $\cos x = 0$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. (2019 新课标 II 卷文科高考真题第 5 题) 在 “一带一路” 知识测验后, 甲、乙、丙三人对成绩进行预测.

甲: 我的成绩比乙高.

乙: 丙的成绩比我和甲的都高.

丙: 我的成绩比乙高.

成绩公布后, 三人成绩互不相同且只有一个人预测正确, 那么三人按成绩由高到低的次序为 ()

- A. 甲、乙、丙 B. 乙、甲、丙
C. 丙、乙、甲 D. 甲、丙、乙

3. 已知 $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x - m$, 若对任意 $x_1 \in [0, 9]$, 总存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{4}]$