

高二

数学

精讲精练(下)·配套习题

有道高中教研组 编著

预约陪陪 +wangyushu2013

目录

001 模块4 选择性必修二

003 4.1 一元函数的导数及其应用

003 4.1.1 导数的概念及其意义

003 4.1.1.1 导数的定义(基础)

004 4.1.1.2 导数的定义(进阶)

005 4.1.1.3 求在点P处的切线

006 4.1.1.4 求过点P的切线

007 4.1.1.5 判断切线条数问题

008 4.1.1.6 公切线问题【菁英专属】

009 4.1.1.7 用切线计算距离最值【目标专属】

010 4.1.2 导数的运算

010 4.1.2.1 基本初等函数的导数及运算法则(基础)

011 4.1.2.2 基本初等函数的导数及运算法则(进阶)

012 4.1.2.3 复合函数的导数

013 4.1.2.4 导数的原函数构造

014 4.1.2.5 【数学思维】导数的原函数构造速解技巧

015 4.1.2.6 【数学思维】隐函数求导【菁英专属】

016 4.1.3 二次函数基础

016 4.1.3.1 含参二次不等式的分类讨论【提高专属】

017 4.1.3.2 二次方程根的分布(基础)【提高专属】

018 4.1.3.3 二次方程根的分布(进阶)【提高专属】

019 4.1.3.4 二次恒成立模型【提高专属】

020 4.1.4 导数在研究函数中的应用

020 4.1.4.1 不含参数的函数的单调性

021 4.1.4.2a 含参函数单调性讨论之可因式分解型(上)

022 4.1.4.2b 含参函数单调性讨论之可因式分解型(下)

023 4.1.4.3 含参函数单调性讨论之类二次型

024 4.1.4.4a 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(上)

025 4.1.4.4b 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(下)【目标、菁英专属】

026 4.1.4.5 含参函数单调性讨论之超越函数【目标、菁英专属】

027 4.1.4.6 已知单调性求参之导数为二次型【目标专属】

028 4.1.4.7 已知单调性求参之导数为非二次型【目标专属】

029 4.1.4.8 极值与极值点

030 4.1.4.9 最值讨论与值域之具体函数

031 4.1.4.10 最值讨论与值域之含参函数【提高专属】

032 4.2 一元函数的导数及其应用的综合提升

032 4.2.1 恒成立问题之已知恒成立求参数范围

032 4.2.1.1 导数可因式分解型分类讨论【提高专属】

033 4.2.1.2 参变分离法

034 4.2.1.3 洛必达法则【菁英专属】

035 4.2.1.4 双逻辑连接词的函数问题之单函数单调性构造【目标、菁英专属】

036 4.2.1.5 双逻辑连接词的函数问题之双函数最值构造【菁英专属】

037 4.2.2 恒成立问题之证明不等式

037 4.2.2.1 主元法【菁英专属】

038 4.2.2.2 常用函数放缩【菁英专属】

039 4.2.2.3 分离函数法【菁英专属】

- 040 4.2.3 根与方程问题之根与零点问题
- 040 4.2.3.1a 参变分离法(上)【提高专属】
- 041 4.2.3.1b 参变分离法(下)【提高专属】
- 042 4.2.3.2 导数可因式分解型分类讨论【提高专属】
- 043 4.2.4 根与方程问题之双零点问题
- 043 4.2.4.1a 极值点偏移模型(上)【目标、菁英专属】
- 044 4.2.4.1b 极值点偏移模型(下)【菁英专属】
- 045 4.2.4.2 双变量的换元构造【菁英专属】
- 046 4.2.5 根与方程问题之极值点问题
- 046 4.2.5.1 单极值点问题【目标、菁英专属】
- 047 4.2.5.2 双极值点问题【菁英专属】
- 048 4.2.6 导数拔高拓展
- 048 4.2.6.1 导数多选题与应试思维综合运用
- 049 4.2.6.2 【数学思维】求和型放缩(上)【菁英专属】
- 050 4.2.6.3 【数学思维】求和型放缩(下)【菁英专属】
- 051 模块5 选择性必修三
- 053 5.1 计数原理
- 053 5.1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理
- 053 5.1.1.1 枚举法及规律性枚举
- 054 5.1.1.2 加法原理和乘法原理的应用
- 055 5.1.1.3 计数原理的简单应用与综合运用【提高专属】
- 056 5.1.1.4 多子集个数速解技巧
- 057 5.1.2 排列与组合
- 057 5.1.2.1 排列数、组合数的概念及综合计算

058	5.1.2.2	特元特位
059	5.1.2.3	相邻捆绑
060	5.1.2.4	插空法模型
061	5.1.2.5	分组分配模型(上)
062	5.1.2.5	分组分配模型(下)
063	5.1.2.6	定序与部分元素相同模型【提高、目标专属】
064	5.1.2.7	隔板法模型
065	5.1.2.8	链状染色模型
067	5.1.2.9	间接计数模型与容斥原理【提高、目标专属】
068	5.1.2.10	排列组合综合应用【提高专属】
069	5.1.3	二项式定理
069	5.1.3.1	杨辉三角形的性质与二项展开式的通项【提高、目标专属】
070	5.1.3.2	二项式定理的系数和【提高、目标专属】
071	5.1.3.3	换元法与多项式展开【目标专属】
072	5.2	随机变量及其分布
072	5.2.1	概率基础与条件概率
072	5.2.1.1	用排列组合计算古典概型的相关问题
073	5.2.1.2	概率的乘法原理
074	5.2.1.3	条件概率公式的概念与应用
075	5.2.1.4	全概公式【菁英专属】
076	5.2.1.5	事件的独立性【目标、菁英专属】
077	5.2.1.6	条件概率多选题与应试思维综合应用
078	5.2.2	离散型随机变量及其分布列
078	5.2.2.1	随机变量的概念与简单分布列【提高专属】

- 079 5.2.3 离散型随机变量的数字特征
- 079 5.2.3.1 期望
- 080 5.2.3.2 方差与标准差
- 081 5.2.3.3 【数学思维】数字特征的意义与策略的应用【目标、菁英专属】
- 082 5.2.3.4 【数学思维】实际问题中复杂概率的计算【目标专属】
- 083 5.2.4 二项分布与超几何分布
- 083 5.2.4.1 两点分布【提高专属】
- 084 5.2.4.2 二项分布
- 085 5.2.4.3 超几何分布
- 086 5.2.4.4 【数学思维】几何分布【目标专属】
- 087 5.2.5 正态分布
- 087 5.2.5.1 正态分布
- 088 5.2.5.2 标准正态分布【目标专属】
- 089 5.2.5.3 概率统计多选题与应试思维综合应用
- 090 5.3 成对数据的统计分析
- 090 5.3.1 成对数据的统计相关性
- 090 5.3.1.1 相关系数的计算【提高专属】
- 091 5.3.2 一元线性回归模型及其应用
- 091 5.3.2.1 线性回归方程的计算【提高专属】
- 092 5.3.2.2 非线性回归方程的计算【目标专属】
- 093 5.3.3 列联表与独立性检验
- 093 5.3.3.1 卡方独立性检验【提高、目标专属】

模块 4

选择性必修二



4.1 一元函数的导数及其应用

4.1.1 导数的概念及其意义



4.1.1.1 导数的定义 (基础)

【习题1】 难度☆☆☆

已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 12, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} =$ ()

- A. -4 B. 4 C. -36 D. 36

【习题2】 难度☆☆☆

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}f'(x_0)$ B. $2f'(-x_0)$ C. $f'(x_0)$ D. $2f'(x_0)$

【习题3】 难度☆☆☆

已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(2)=4$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+2x) - f(2)}{x} =$ ()

- A. 4 B. 2 C. 8 D. -8



4.1.1.2 导数的定义(进阶)

【习题1】 难度☆☆☆

已知函数 $f(x) = x^2 + 3$, 当自变量由 1 变到 1.1 时, 函数的平均变化率为 ()

- A. 1 B. 1.1 C. 2 D. 2.1

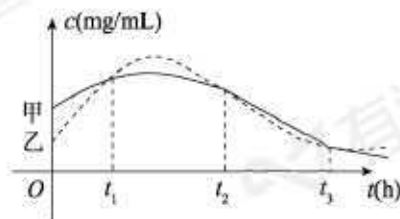
【习题2】 难度☆☆☆

一个物体做直线运动, 位移 s (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的函数关系为 $s(t) = 6t^2 + mt$, 且这一物体在 $1 \leq t \leq 2$ 这段时间内的平均速度为 20m/s, 则实数 m 的值为 ()

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

【习题3】 难度☆☆☆

为了评估某种治疗肺炎药物的疗效, 有关部门对该药物在人体血管中的药物浓度进行测量. 设该药物在人体血管中药物浓度 c 与时间 t 的关系为 $c = f(t)$, 甲、乙两人服用该药物后, 血管中药物浓度随时间 t 变化的关系如下图所示. 给出下列四个结论错误的是 ()



- A. 在 t_1 时刻, 甲、乙两人血管中的药物浓度相同
 B. 在 t_2 时刻, 甲、乙两人血管中药物浓度的瞬时变化率不同
 C. 在 $[t_2, t_3]$ 这个时间段内, 甲、乙两人血管中药物浓度的平均变化率相同
 D. 在 $[t_1, t_2], [t_2, t_3]$ 两个时间段内, 甲血管中药物浓度的平均变化率相同

4.1.1.3 求在点 P 处的切线

【习题1】 难度 ★☆☆

曲线 $f(x) = e^x + x^2 - 2x$ 的图像在 $(0, f(0))$ 处切线的倾斜角为 ()

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{3\pi}{4}$

【习题2】 难度 ★☆☆

函数 $f(x) = x^3 + x$ 的图象在 $x = -1$ 处的切线斜率为 ()

A. 6

B. 4

C. -4

D. -6

【习题3】 难度 ★☆☆

已知曲线 $y = e^x + ax$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与直线 $2x - y + 3 = 0$ 平行, 则实数 a 等于 ()

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

4.1.1.4 求过点 P 的切线

【习题1】 难度 ★★★

过原点且与函数 $f(x) = \ln(-x)$ 图像相切的直线方程是 ()

A. $y = -x$

B. $y = -\frac{2}{e}x$

C. $y = -\frac{1}{e}x$

D. $y = -ex$

【习题2】 难度 ★★★

(多选) 已知曲线 $f(x) = 2x^3 + 1$, 则曲线过点 $P(1, 3)$ 的切线方程为 ()

A. $6x - y - 3 = 0$

B. $3x - 2y + 3 = 0$

C. $6x + y - 9 = 0$

D. $3x + 2y - 9 = 0$



4.1.1.5 判断切线条数问题

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = -x^3 + 3x$, 则过点 $(-3, -9)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的切线的条数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【习题2】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$, 若过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 则 t 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -3)$ B. $(-3, -1)$
C. $(-1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

【习题3】 难度 ★★★

若过点 $(1, b)$ 可以作曲线 $y = \ln x$ 的两条切线, 则 ()

- A. $b < 0$ B. $b > 0$ C. $b > 1$ D. $b < 1$



4.1.1.6 公切线问题

菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

若直线 l 是曲线 $y = \ln x - 1$ 与 $y = \ln(x-1)$ 的公切线, 则直线 l 的方程为 ()

A. $y = x - 2$

B. $y = x$

C. $y = x + 1$

D. $y = e^x$

【习题2】 难度 ★★★

若函数 $f(x) = \ln x$ 与函数 $g(x) = x^2 + x + a (x < 0)$ 有公切线, 则实数 a 的取值范围是

()

A. $(\ln \frac{1}{2e}, +\infty)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(\ln 2, +\infty)$



4.1.1.7 用切线计算距离最值

目标专属

【习题1】 难度 ★☆☆

若点 P 是曲线 $y = \ln x - x^2$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $l: x + y - 4 = 0$ 距离的最小值为

()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{2}$

【习题2】 难度 ★☆☆

已知 A 是函数 $f(x) = x - 2\ln x$ 图像上的动点, B 是直线 $x + y + 2 = 0$ 上的动点, 则 A, B 两点间距离 $|AB|$ 的最小值为

()

A. $4\sqrt{2}$

B. 4

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{5}$

【习题3】 难度 ★☆☆

已知 $f(x) = \ln x$ 图象上有且只有三点到直线 $y = x + a$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 则 a 的值为()

A. 3

B. -3

C. -5

D. 5

4.1.2 导数的运算



4.1.2.1 基本初等函数的导数及运算法则(基础)

【习题1】 难度 ★☆☆

若 $y = \sin \frac{\pi}{3}$, 则 $y' =$

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【习题2】 难度 ★☆☆

下列求导数计算错误的是

A. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

B. $(\frac{x^2}{e^x})' = \frac{x^2 - 2x}{e^x}$

C. $(x \ln x)' = 1 + \ln x$

D. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

【习题3】 难度 ★☆☆

已知 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) =$

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{2}{\pi}$

C. $-\frac{1}{\pi}$

D. $-\frac{4}{\pi}$



4.1.2.2 基本初等函数的导数及运算法则(进阶)

【习题1】 难度 ★☆☆

已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $f(x) = \sin x + 2xf'(0)$, 则 $f'(0) =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. -1

D. 1

【习题2】 难度 ★☆☆

已知函数 $f(x) = e^x + x^3 f'(1)$, 则 $f(1) =$ ()

A. $-e$

B. $-e$

C. $\frac{e}{2}$

D. $-\frac{e}{2}$

【习题3】 难度 ★☆☆

函数 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数为 $f'(x)$, 则 $f'(1) =$ ()

A. -4

B. -6

C. 4

D. 6



4.1.2.3 复合函数的导数

【习题1】 难度 ★★★

下列式子不正确的是

A. $(3x^2 + \cos x)' = 6x - \sin x$

B. $(\ln x - 2^x)' = \frac{1}{x} - 2^x \ln 2$

C. $(2\sin 2x)' = 2\cos 2x$

D. $(\frac{\sin x}{x})' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

【习题2】 难度 ★★★

设 $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$, 则 $f'(2) =$

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【习题3】 难度 ★★★

函数 $y = \cos(1 + x^2)$ 的导数是

A. $2x \sin(1 + x^2)$

B. $-\sin(1 + x^2)$

C. $-2x \sin(1 + x^2)$

D. $2\cos(1 + x^2)$



4.1.2.4 导数的原函数构造

【习题1】 难度 ★★★

已知 $f'(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数, 且满足 $xf'(x) + f(x) > 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 则下列选项中一定正确的是 ()

A. $f(1) > \frac{f(2)}{2}$

B. $\frac{f(1)}{2} > f(2)$

C. $f(1) < \frac{f(2)}{2}$

D. $\frac{f(1)}{2} < f(2)$

【习题2】 难度 ★★★

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, $f(x) + f'(x) > 0$, 且 $f(1) = 0$. 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ()

A. $(0, +\infty)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-\infty, 0)$

【习题3】 难度 ★★★

若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 满足 $f'(x) > 2f(x)$, 则当 $a > 0$ 时, $f(a)$ 与 $e^{2a}f(0)$ 的大小关系为 ()

A. $f(a) < e^{2a}f(0)$

B. $f(a) > e^{2a}f(0)$

C. $f(a) = e^{2a}f(0)$

D. 不能确定



4.1.2.5 【数学思维】导数的原函数构造速解技巧

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $y=f(x)$ 对任意的 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x + f(x)\sin x > 0$ (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 则下列不等式成立的是 ()

- A. $f(0) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$ B. $f(0) < 2f(\frac{\pi}{3})$
 C. $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3}) > f(-\frac{\pi}{4})$ D. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3}) < f(\frac{\pi}{4})$

【习题2】 难度 ★★★

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) > 1 - f'(x)$, $f(0) = 0$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 则不等式 $e^x f(x) > e^x - 1$ (其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
 C. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

【习题3】 难度 ★★★

已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) + xf'(x) > 0$ 且

$f(2) = \frac{1}{2}$, 则不等式 $f(x) > \frac{1}{x}$ 的解集是 ()

- A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



4.1.2.6 【数学思维】隐函数求导

精英专属

【习题1】 难度 ★☆☆

过点 $M(-1, 2)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线方程为 ()

- A. $x - 2y + 5 = 0$ B. $x + 2y + 5 = 0$
C. $2x - y - 5 = 0$ D. $2x + y + 5 = 0$

【习题2】 难度 ★☆☆

已知过圆锥曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $\frac{x_0 x}{m} + \frac{y_0 y}{n} = 1$. 过椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点 $A(3, -1)$ 作椭圆的切线 l , 则过 A 点且与直线 l 垂直的直线方程为 ()

- A. $x - y - 3 = 0$ B. $x + y - 2 = 0$
C. $2x + 3y - 3 = 0$ D. $3x - y - 10 = 0$

【习题3】 难度 ★☆☆

设椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆上, 则该椭圆在 P 处的切线方程是_____.

【习题4】 难度 ★☆☆

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 直线 $l: x = -1$, 过直线 l 上一动点 P 作抛物线的切线, 切点分别为 A, B , 则直线 AB 过定点_____. (填写具体坐标)

4.1.3 二次函数基础



4.1.3.1 含参二次不等式的分类讨论

提高专属

【习题1】 ★★★

解关于 x 的不等式: $kx^2 - kx + 1 < 0$.



4.1.3.2 二次方程根的分布(基础)

提高专属

【习题1】 难度 ★★★

已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的两个实数根, 且 $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, 2)$, 则实数 b 的取值范围为 ()

A. $(0, +\infty)$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $(0, 1)$ D. $(0, \frac{3}{2})$

【习题2】 难度 ★★★

关于 x 的方程 $x^2 + (a-2)x + 5 - a = 0$ 有两根, 其中一根小于 2, 另一根大于 3, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $|a| < -5$ 或 $a > -4$ B. $|a| - 5 < a < -4$ C. $|a| < -5$ D. $|a| > -4$

【习题3】 难度 ★★★

已知方程 $x^2 + (m+2)x + m + 5 = 0$ 有两个正根, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $m < -2$ B. $m \leq -4$ C. $m > -5$ D. $-5 < m \leq -4$



4.1.3.3 二次方程根的分布(进阶)

提高专属

【习题1】 难度 ★☆☆

关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (1-m)x + m = 0$ 有实数根, 则 m 的范围 ()

A. $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$

B. $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$ 且 $m \neq 0$

C. $-1 < m < \frac{1}{3}$ 且 $m \neq 0$

D. $-1 < m < \frac{1}{3}$

【习题2】 难度 ★★☆☆

关于 x 的方程 $x^2 + (m-2)x + 2m-1 = 0$ 恰有一根属于 $(0, 1)$, 则实数 m 的取值范围是

()

A. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

B. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

C. $[\frac{1}{2}, 2)$

D. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \cup \{6-2\sqrt{7}\}$



4.1.3.4 二次恒成立模型

提高专属

【习题1】 难度 ★☆☆

若关于 x 的不等式 $mx^2 - mx - 1 < 0$ 的解集是 $\mathbf{R}$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $\{m \mid -4 \leq m \leq 0\}$ B. $\{m \mid -4 < m \leq 0\}$
 C. $\{m \mid 0 \leq m < 4\}$ D. $\{m \mid -4 < m < 0\}$

【习题2】 难度 ★☆☆

当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 2 > 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $(-2, +\infty)$ B. $(2\sqrt{2}, +\infty)$
 C. $(0, +\infty)$ D. $(-2\sqrt{2}, +\infty)$

【习题3】 难度 ★☆☆

不等式 $(m-1)x^2 + 3(m-1)x - m < 0$ 对任意 $-3 \leq x \leq 1$ 恒成立, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{11}{13}, \frac{4}{3})$ B. $(\frac{11}{13}, \frac{3}{4})$
 C. $(\frac{9}{13}, \frac{3}{4})$ D. $(\frac{9}{13}, \frac{4}{3})$

4.1.4 导数在研究函数中的应用



4.1.4.1 不含参数的函数的单调性

【习题1】 难度 ★★★

已知 $f(x) = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;



4.1.4.2a 含参函数单调性讨论之可因式分解型(上)

【习题1】 难度 ★★☆☆

已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.



4. 1. 4. 2b 含参函数单调性讨论之可因式分解型(下)

【习题1】 ★★★

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1$ ($a \in \mathbf{R}$). 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性.



4.1.4.3 含参函数单调性讨论之类二次型

【习题1】 难度 ★★☆☆

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.



4. 1. 4. 4a 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(上)

【习题1】  ★★★已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a\ln x - ax$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.



4.1.4.4b 含参函数单调性讨论之不可因式分解型(下)

目标、菁英专属

【习题1】 难度 ★★☆☆

设函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{k}{x} - kx$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性.



4.1.4.5 含参函数单调性讨论之超越函数 目标、菁英专属

【习题1】 ★★★

已知函数 $f(x) = mx \ln x - x^2 - x (m \in \mathbf{R})$, 若 $m = 1$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.



4.1.4.6 已知单调性求参之导数为二次型

目标专属

【习题1】 难度 ★★☆☆

已知函数 $f(x) = x^3 + ax$ ，若函数 $h(x) = f(x) + ax^2 + 1$ 在区间 $(-2, -1)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围。



4.1.4.7 已知单调性求参之导数为非二次型

目标专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$, $g(x) = \frac{f(x)}{a}$, $a \neq 0$. 若 $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围.



4.1.4.8 极值与极值点

【习题1】 难度 ★☆☆

已知函数 $f(x) = -xe^x$, 那么 $f(x)$ 的极大值是 ()

A. $\frac{1}{e}$

B. $-\frac{1}{e}$

C. $-e$

D. e

【习题2】 难度 ★☆☆

已知函数 $f(x) = e^{1-x} - x^2$, 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点.



4.1.4.9 最值讨论与值域之具体函数

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ax^2 + b$ ($a > 0$)，函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x+1$ ，当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值与最大值。



4.1.4.10 最值讨论与值域之含参函数

提高专属

【习题1】 难度 ★★☆☆

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ ($a \in \mathbf{R}$)，求函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值.

4.2 一元函数的导数及其应用的综合提升

4.2.1 恒成立问题之已知恒成立求参数范围



4.2.1.1 导数可因式分解型分类讨论

提高专属

【习题1】

★★★

已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a$ ($a > 0$). 若 $f(x) \geq 2\ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.



4.2.1.2 参变分离法

【习题1】 难度 ★★★

不等式 $\ln x - kx \leq 0$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $[0, e)$ B. $(-\infty, e]$ C. $[0, \frac{1}{e}]$ D. $[\frac{1}{e}, +\infty)$

【习题2】 难度 ★★★

若方程 $x \ln x + e^x + 1 - ax = 0$ 有两个不等的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(e, +\infty)$ B. $(e+1, +\infty)$ C. $(2e, +\infty)$ D. $(e^{-1}, +\infty)$



4.2.1.3 洛必达法则

菁英专属

【习题1】 难度 ★★★设 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$.(1) 求 $f(x)$ 的最小值;(2) 若对任意的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.



4.2.1.4 双逻辑连接词的函数问题之单函数单调性构造

目标、菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x + 1$ ($a \in \mathbf{R}$).

若 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.



4.2.1.5 双逻辑连接词的函数问题之双函数最值构造

菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - \frac{2}{3}$, $g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$, 对任意的 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{3}, 2]$, 都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围

4.2.2 恒成立问题之证明不等式



4.2.2.1 主元法

菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = a(x + 2e) - \frac{\ln x}{x} - 1$, $a \in \mathbf{R}$. 证明: 当 $a \geq \frac{1}{2e}$ 时, $f(x) \geq 0$.



4.2.2.2 常用函数放缩

菁英专属

【习题1】 ★★★

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - 2x$. 证明: $e^x + \frac{a - 2x^2 - 2x}{x} > f(x)$.



4.2.2.3 分离函数法

菁英专属

【习题1】 难度 ★★☆☆

已知函数 $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$.(1) 求 $f(x)$ 的最小值; $f(x)_{\min} = 0$ (2) 利用(1)中的结果, 证明: $e^x - e^2 \ln x + x^2 + (e-1)x - 1 > 0$.

4.2.3 根与方程问题之根与零点问题



4.2.3.1a 参变分离法(上)

提高专属

【习题1】 难度 ★★★

设函数 $f(x) = e^x - 2a \sin x$, $x \in (0, \pi)$ 有且仅有一个零点, 则实数 a 的值为 ()

A. $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$

D. $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}$

【习题2】 难度 ★★★

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x} - \frac{x^2}{6}$ ($m \in \mathbf{R}$), 若函数 $g(x) = f'(x)$ 有两个零点, 则 m 的取值范围是 ()

A. $[0, \frac{2}{3})$

B. $(0, \frac{2}{3})$

C. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

D. $(-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$

【习题3】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = e^x$, 函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 若 $h(x) = g(x) - kx$ 无零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{e}, e^2)$

B. $(\frac{1}{e}, e)$

C. $(e, +\infty)$

D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$



4.2.3.1b 参变分离法(下)

提高专属

【习题1】 难度 ★★★

已知 $f(x) = ax^2 - \ln x - x$, $a \neq 0$. 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.



4.2.3.2 导数可因式分解型分类讨论

提高专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = a^2x + 2a\sqrt{x} - 2\ln x (a \neq 0)$ ，当 $a < 0$ 时，若函数 $f(x)$ 无零点，求 a 的取值范围.

4.2.4 根与方程问题之双零点问题



4.2.4.1a 极值点偏移模型(上)

目标、菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = x^2 + ax - x \ln x$ 的导函数为 $f'(x)$.

若 $f'(x)$ 存在两个不同的零点 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 > 1$.



4.2.4.1b 极值点偏移模型(下)

菁英专属

【习题1】

难度 ★★★

已知函数 $f(x) = x - e^x + a$ 恰有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

- (1) 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若函数 $g(x) = f(x) - f(-2x)$, 求证: $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;
- (3) 证明: $2x_1 + x_2 < 0$.



4.2.4.2 双变量的换元构造

精英专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = a \ln x - bx - 3$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$)

(1) 若 $a = b$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = 1$ 时, 设 $g(x) = f(x) + 3$, 若 $g(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证: $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

4.2.5 根与方程问题之极值点问题



4.2.5.1 单极值点问题

目标、菁英专属

【习题1】 ★★★

已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + a\ln(x+1)$ 有两个极值点.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 设函数 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $f(x_2) < 1 - \ln 2$.



4.2.5.2 双极值点问题

菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = a \ln(x+2) + \frac{1}{2}x^2$, ($a > 0$).

(1) 讨论 $y=f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求证: $1 < f(x_1) + f(x_2) < 2$.

4.2.6 导数拔高拓展



4.2.6.1 导数多选题与应试思维综合运用

【习题1】 难度 ★★★

(多选) 已知函数 $f(x) = (x-1)^2(x-a)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点
- B. 当 $a=4$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上单调递减
- C. 若 $f(4+x)f(4-x) \leq 0$ 恒成立, 则 $f(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \leq f(3 + \frac{\sqrt{3}}{3})$
- D. 若关于 x 的不等式 $f(x) > -4$ 的解集为 $(m, +\infty)$, 则 $a < 4$

【习题2】 难度 ★★☆☆

(多选) 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \ln x + 2$, 下列说法中正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{3}, 1]$ 恰有一个极值点
- B. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{3}, 1]$ 上单调递增
- C. $\forall x > 0, f(x) > \frac{29}{18}$
- D. P 是函数 $f(x)$ 的图象上一动点, Q 是直线 $y = 2x - 2$ 上一动点, 则 $|PQ|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}$



4.2.6.2 【数学思维】求和型放缩(上)

菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

已知函数 $f(x) = ax^2 - x \ln x - \frac{1}{2}$.

- (1) 当 $a=0$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 证明: $\ln \sqrt{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{1 \times 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \times 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*)$.



4.2.6.3 【数学思维】求和型放缩(下)

菁英专属

【习题1】

难度 ★★★

已知函数 $f(x) = e^x - ax^3$.(1) 若 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;(2) 证明: 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, $f(x) > 0$;(3) 证明: 当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时, $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n} < 3$.

模块 5

选择性必修三



5.1 计数原理

5.1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理



5.1.1.1 枚举法及规律性枚举

【习题1】 难度 ★☆☆

已知 $x \in \{2, 3, 7\}$, $y \in \{-3, -4, 8\}$, 则 xy 可表示不同的值的个数为 ()

- A. 10 B. 6 C. 8 D. 9

【习题2】 难度 ★☆☆

用标有 1 克, 5 克, 10 克的砝码各一个, 在一架无刻度的天平上称量重物, 如果天平两端均可放置砝码, 那么可以称出的不同克数 (正整数克数的重物) 有多少种? ()

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

【习题3】 难度 ★☆☆

从 0, 2 中选一个数字, 从 1, 3, 5 中选两个数字, 组成无重复数字的三位数, 其中奇数的个数为 _____ (用数字作答).



5.1.1.2 加法原理和乘法原理的应用

【习题1】 难度 ★★★

$a_1(b_1 + b_2)(c_1 + c_2 + c_3)(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$ 展开后的项数为 ()

- A. 10 B. 18 C. 24 D. 36

【习题2】 难度 ★★★

设有 6 幅不同的国画, 4 幅不同的油画, 5 幅不同的水彩画.

- (1) 从这些国画、油画、水彩画中各选一幅画布置房间, 有几种不同的选法?
(2) 从这些画中任选出两幅不同画种的画布置房间, 有几种不同的选法?



5.1.1.3 计数原理的简单应用与综合运用

提高专属

【习题1】 难度☆☆☆

我国新能源汽车产销量连续5年居世界首位. 某客户欲购买一辆新能源汽车, 已知A品牌有5种不同型号的汽车, B品牌有10种不同型号的汽车, C品牌有6种不同型号的汽车可供选择, 则该客户不同的选择种数为 ()

A. 21

B. 40

C. 56

D. 300

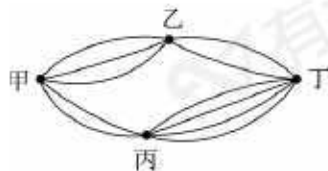
【习题2】 难度☆☆☆

5名同学去听同时进行的3个名师讲座, 每个同学可自由选择, 且必须选择一个讲座, 则不同的选择种数是 ()

A. 5^3 B. 3^5 C. $5 \times 4 \times 3$ D. 5×4

【习题3】 难度☆☆☆

如图, 从甲地到乙地有3条路, 从乙地到丁地有2条路; 从甲地到丙地有2条路, 从丙地到丁地有4条路, 则从甲地到丁地不同的路线有 ()



A. 11条

B. 12条

C. 13条

D. 14条



5.1.1.4 多子集个数速解技巧

【习题1】 难度 ★☆☆

集合 M, N 满足条件: $M \cup N = \{1, 2\}$, 则这样的有序集合对 (M, N) 共有 ()

- A. 6个 B. 7个 C. 8个 D. 9个

【习题2】 难度 ★★☆☆

A, B 都是 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的子集, 则满足 $A \cap B = \{2\}$ 的不同集合组 (A, B) 有 _____ 组.

【习题3】 难度 ★★☆☆

若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则记 $[A_1, A_2]$ 是 A 的一组双子集拆分. 规定: $[A_1, A_2]$ 和 $[A_2, A_1]$ 是 A 的同一组双子集拆分, 已知集合 $A = \{1, 2\}$, 那么 A 的不同双子集拆分共有

- ()
A. 8组 B. 7组 C. 5组 D. 4组

5.1.2 排列与组合



5.1.2.1 排列数、组合数的概念及综合计算

【习题1】 难度 ★☆☆

$(n-1998)(n-1999)\cdots(n-2023)(n-2024)$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2024$) 可表示为 ()

A. A_{n-1998}^{27}

B. A_{n-1998}^{26}

C. A_{n-2024}^{27}

D. A_{n-2024}^{26}

【习题2】 难度 ★☆☆

$A_4^2 + C_7^4$ 等于

A. 35

B. 47

C. 45

D. 57

【习题3】 难度 ★☆☆

四位同学返校看望老师，由于时间关系，只见到语文、数学、英语三位老师，于是他们邀请老师一起照相，三位老师坐中间共有多少种排列方式 ()

A. 90

B. 120

C. 144

D. 216



5.1.2.2 特元特位

【习题1】 难度 ★☆☆

为庆祝即将到来的中秋节,某校计划举行庆祝活动,共有4个节目,要求甲节目不排在最后一个,则不同的排法种数为 ()

- A. 27 B. 24 C. 18 D. 9

【习题2】 难度 ★☆☆

甲、乙、丙、丁、戊共5名同学进行劳动技能比赛,决出第1名到第5名的名次,甲和乙去询问成绩,回答者对甲说:“很遗憾,你没有得到冠军”,对乙说:“你不是最后一名”,从这两个回答分析,5人名次的不同排列情况共有 ()

- A. 72种 B. 78种 C. 96种 D. 102种

【习题3】 难度 ★☆☆

现要从A, B, C, D, E这5人中选出4人,安排在甲、乙、丙、丁4个岗位上,如果A不能安排在甲岗位上,则安排的方法有 ()

- A. 56种 B. 64种 C. 72种 D. 96种



5.1.2.3 相邻捆绑

【习题1】 难度 ★☆☆

某商场的展示台上有6件不同的商品，摆放时要求A、B两件商品必须在一起，则摆放的种数为

A. $A_2^2 A_5^5$

B. $A_2^2 A_4^4$

C. A_5^5

D. $A_2^2 A_6^6$

【习题2】 难度 ★☆☆

现有甲、乙、丙、丁四位同学要与两位老师站成一排合影留念，则甲同学不站两端且两位老师必须相邻的站法有

A. 72 种

B. 144 种

C. 288 种

D. 576 种

【习题3】 难度 ★☆☆

某班在一次班团活动中，安排2名男生和4名女生讲演，为安排这六名学生讲演的顺序，要求两名男生之间不超过1人讲演，且第一位和最后一位出场讲演的是女生，则不同的安排方法总数为

A. 168

B. 192

C. 240

D. 336



5.1.2.4 插空法模型

【习题1】 难度 ★☆☆

将3个完全相同的红球和2个完全相同的黄球随机排在一行,则2个黄球不相邻的情况有()种

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【习题2】 难度 ★★☆☆

《红楼梦》是中国古代章回体长篇小说,中国古典四大名著之一,《红楼梦》第三十七回贾探春提议邀集大观园中有文采的人组成海棠诗社.诗社成立目的旨在“宴集诗人於风庭月榭;醉飞吟盏於帘杏溪桃,作诗吟辞以显大观园众姊妹之文采不让桃李须眉.”诗社成员有8人:林黛玉、薛宝钗、史湘云、贾迎春、贾探春、贾惜春、贾宝玉及李纨,若这8人排成一排进入大观园,且林黛玉、薛宝钗、贾宝玉3人不相邻,则不同的排法种数有()

- A. 1440 B. 2400 C. 14400 D. 86400

【习题3】 难度 ★★☆☆

某村镇道路上有10盏照明路灯,为了节约用电,需要关闭其中不相邻的3盏,但考虑行人夜间出行安全,两端的路灯不能关闭,则关灯方案的种数有()

- A. 60 B. 35 C. 20 D. 5



5.1.2.5 分组分配模型（上）

【习题1】 难度 ★☆☆

将4个不同的小球平均放入2个不同的盒子中，有多少种不同的放法？（ ）

- A. 6 B. 12 C. 3 D. 16

【习题2】 难度 ★☆☆

某市组织应急处置山火救援行动，现从组织好的5支志愿团队中任选1支救援物资接收点服务，另外4支志愿团队分配给“传送物资、砍隔离带、收拾垃圾”三个不同项目，每支志愿团队只能分配到1个项目，且每个项目至少分配1个志愿团队，则不同的分配方案种数为（ ）

- A. 36 B. 81 C. 120 D. 180

【习题3】 难度 ★☆☆

共有9人参加了某课程的学习，一项作业要求由3人组成的团队完成，不区分每个团队内3人的角色和作用，共有（ ）种可能的组队方案。

- A. 84 B. 729 C. 1680 D. 280



5.1.2.5 分组分配模型 (下)

【习题1】 难度 ★★★

中国空间站(China Space Station)的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱. 2023年, 中国空间站将正式进入运营阶段. 假设空间站要安排甲、乙等6名航天员开展实验, 三舱中每个舱至少一人至多三人, 则不同的安排方法有 ()

- A. 450 种 B. 72 种 C. 90 种 D. 360 种

【习题2】 难度 ★★★

为响应国家政策, 安排工作人员调研甲、乙、丙这3个村的产业规划, 有5名工作人员可供选择, 若5名工作人员全部安排下去, 每名工作人员只分配到1个村, 每个村至少分配1名工作人员, 则有_____种不同的分配方法数.

【习题3】 难度 ★★★

将5名志愿者随机派往A, B, C三个社区进行宣讲活动, A社区至少派2名志愿者, B, C社区至少各派1名志愿者, 则不同的安排方法有 ()

- A. 50 B. 60 C. 80 D. 90



5.1.2.6 定序与部分元素相同模型

提高、目标专属

【习题1】 难度 ★★★

将 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 六个字母排成一排，且 A 、 B 均在 C 的同侧，则不同的排法共有

()

A. 480 种

B. 240 种

C. 960 种

D. 720 种

【习题2】 难度 ★★★

4 名护士和 2 名医生站成一排，2 名医生顺序固定，则不同的排法种数为 ()

A. 480

B. 360

C. 288

D. 144

【习题3】 难度 ★★★

若把英文单词 “anyway” 的字母顺序写错了，则可能出现的错误写法的种数为 ()

A. 179

B. 181

C. 193

D. 205



5.1.2.7 隔板法模型

【习题1】 难度 ★★★

将7个相同的球放入4个不同的盒子中,则每个盒子都有球的放法种数为 ()

- A. 22 B. 25 C. 20 D. 48

【习题2】 难度 ★★★

$x+y+z=6$ 有非负整数解有多少组?

【习题3】 难度 ★★★

把20个相同的小球放到三个编号为1、2、3的盒子里,且每个盒子内的小球数要多于盒子的编号数,则共有_____种放法.

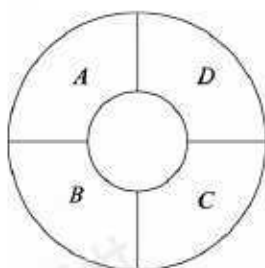


5.1.2.8 链状染色模型

【习题1】 难度 ★★★

如图，一圆形信号灯分成 A, B, C, D 四块灯带区域，现有 3 种不同的颜色供灯带使用，要求在每块灯带里选择 1 种颜色，且相邻的 2 块灯带选择不同的颜色，则不同的信号总数为

()



A. 18

B. 24

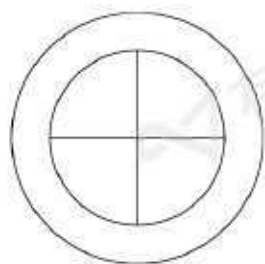
C. 30

D. 42

【习题2】 难度 ★★★

某小区物业在该小区的一个广场布置了一个如图所示的圆形花坛，花坛分为 5 个区域，现有 6 种不同的花卉可供选择，要求相邻的区域（有公共边）不能布置相同的花卉，且每个区域只布置一种花卉，则不同的布置方案有

()



A. 720 种

B. 1440 种

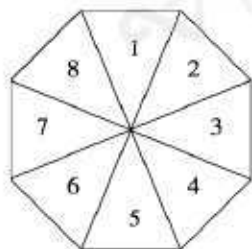
C. 1560 种

D. 2520 种

【习题3】 难度 ★★★

中国是最早发明雨伞的国家，伞是中国劳动人民一个重要的创造，如图所示的雨伞，其伞面被伞骨分成8个区域，每个区域分别印有数字1, 2, 3, ..., 8，现准备给该伞面的每个区域涂色，要求每个区域涂一种颜色，相邻两个区域所涂颜色不能相同，对称的两个区域（如区域1与区域5）所涂颜色相同，若有7种不同颜色的颜料可供选择，则不同的涂色方案有

()



A. 1050 种

B. 1260 种

C. 1302 种

D. 1512 种



5.1.2.9 间接计数模型与容斥原理

提高、目标专属

【习题1】 难度 ★☆☆

某班一个课外调查小组调查了该班同学对物理和历史两门学科的兴趣爱好情况，其中该班同学对物理或历史感兴趣的同学占90%，对物理感兴趣的占56%，对历史感兴趣的占74%，则既对物理感兴趣又对历史感兴趣的同学占该班学生总数的比例是 ()

- A. 70% B. 56% C. 40% D. 30%

【习题2】 难度 ★☆☆

从4名男生和2名女生中选2人参加会议，至少有一名男生，不同的安排方法有 ()种.

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

【习题3】 难度 ★☆☆

用数字0, 1, 2, 3, 4, 5组成没有重复数字且大于201345的六位数的个数为 ()

- A. 478 B. 479 C. 480 D. 481



5.1.2.10 排列组合综合应用

提高专属

【习题1】 难度 ★☆☆

六个人从左至右排成一行，最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有

A. 192 种

B. 216 种

C. 240 种

D. 288 种

【习题2】 难度 ★☆☆

将5名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶4个项目进行培训，每名志愿者只分配到1个项目，每个项目至少分配1名志愿者，则不同的分配方案共有 ()

A. 60 种

B. 120 种

C. 240 种

D. 480 种

【习题3】 难度 ★☆☆

把5件不同产品摆成一排，若产品A与产品B相邻，且产品A与产品C不相邻，则不同的摆法有 ()

A. 18 种

B. 24 种

C. 36 种

D. 48 种

5.1.3 二项式定理



5.1.3.1 杨辉三角形的性质与二项展开式的通项

提高、目标专属

【习题1】 难度 ★☆☆

在 $(1+x)^3$ 的展开式中, x 的系数为 ()

- A. 1 B. 3 C. 6 D. 9

【习题2】 难度 ★☆☆

在 $(x - \frac{1}{2x})^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 ()

- A. $-\frac{9}{2}$ B. $-\frac{21}{2}$ C. $\frac{21}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

【习题3】 难度 ★☆☆

若 $(x^3 - \frac{a}{x})^{10}$ 的展开式中 x^2 项的系数为 -120 , 则实数 $a =$ ()

- A. -3 B. 1 C. -1 D. -2



5.1.3.2 二项式定理的系数和

提高、目标专属

【习题1】 难度 ★★★

在 $(a+b)^n$ 的二项展开式中, 若二项式系数和为 64, 则 $n =$ ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【习题2】 难度 ★★★

已知 $(\sqrt{x} + \frac{a}{x})^8$ 的展开式中各项系数之和为 0, 则展开式中 x 的系数为 ()

- A. 28 B. -28 C. 45 D. -45

【习题3】 难度 ★★★

$(x-2y)^{10}$ 展开式中二项式系数和与项的系数和分别为 ()

- A. 3^{11} , -1 B. 2^{10} , -1 C. 2^{10} , 1 D. 3^{11} , 1



5.1.3.3 换元法与多项式展开

目标专属

【习题1】 难度 ★★★

已知多项式 $(x-1)^{10} = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_{10}(x+1)^{10}$, 则 $a_7 =$ ()

- A. -960 B. 960 C. -480 D. 480

【习题2】 难度 ★★★

若 $(2-x)^6 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_6(1+x)^6$, 则 $a_4 =$ ()

- A. 270 B. 135 C. -135 D. -270

【习题3】 难度 ★★★

$(x^2 + \frac{1}{x} + y)^4$ 的展开式中 $\frac{y^2}{x^2}$ 的系数为 ()

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

5.2 随机变量及其分布

5.2.1 概率基础与条件概率



5.2.1.1 用排列组合计算古典概型的相关问题

【习题1】 难度 ★☆☆

从3名男同学和2名女同学中随机选3名参加诗歌朗诵比赛,则恰有1名女同学入选的概率为

- ()
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【习题2】 难度 ★☆☆

将3个1和4个0随机排成一行,则3个1任意两个1都不相邻的概率为 ()

- A. $\frac{1}{14}$ B. $\frac{2}{21}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{4}{35}$

【习题3】 难度 ★☆☆

将2个男生和4个女生排成一排,则男生既不相邻也不排两端的概率为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$



5.2.1.2 概率的乘法原理

【习题1】 难度 ★★★

在一段时间内，甲去某地的概率是 $\frac{1}{4}$ ，乙去此地的概率是 $\frac{1}{5}$ ，假定两人的行动相互之间没有影响，那么在这段时间内至少有1人去此地的概率是 ()

A. $\frac{3}{20}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{9}{20}$

【习题2】 难度 ★★★

一个袋中有3个黑球，2个白球，第一次摸出球，然后再放进去，再摸第二次，则两次摸球都是白球的概率为 ()

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{2}{25}$

D. $\frac{4}{25}$

【习题3】 难度 ★★★

出租车司机老王从饭店到火车站途中经过六个交通岗，已知各交通岗信号灯相互独立。假设老王在各交通岗遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$ ，则他遇到红灯前已经通过了两个交通岗的概率为 ()

A. $\frac{1}{24}$

B. $\frac{4}{27}$

C. $\frac{7}{9}$

D. $\frac{1}{27}$



5.2.1.3 条件概率公式的概念与应用

【习题1】 难度 ★☆☆

掷一个均匀的骰子. 记 A 为“掷得点数大于等于2”, B 为“掷得点数为奇数”, 则 $P(B|A)$ 为 ()

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{5}$

【习题2】 难度 ★☆☆

一个袋子中有大小和质地相同的4个球, 其中有2个红球, 2个黄球, 每次从中随机摸出1个球, 摸出的球不再放回, 则第二次摸到黄球的条件下, 第一次摸到红球的概率为()

A. $\frac{1}{3}$

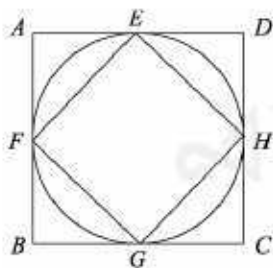
B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

【习题3】 难度 ★☆☆

已知 $ABCD$ 为正方形, 其内切圆 I 与各边分别切于 E, F, G, H , 连接 EF, FG, GH, HE . 现向正方形 $ABCD$ 内随机抛掷一枚豆子, 记事件 A : 豆子落在圆 I 内, 事件 B : 豆子落在四边形 $EFGH$ 外, 则 $P(B|A) =$ ()



A. $1 - \frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $1 - \frac{2}{\pi}$

D. $\frac{2}{\pi}$



5.2.1.4 全概公式

精英专属

【习题1】 难度 ★☆☆

为响应“书香临夏、悦享阅读”活动，某校开展语文教师课文朗诵比赛。已知男女教师人数相同，有8%的男教师和4%的女教师擅长中华诗词朗诵，现随机选一位教师，这位教师恰好擅长中华诗词朗诵的概率是 ()

- A. 0.05 B. 0.06 C. 0.10 D. 0.12

【习题2】 难度 ★☆☆

有3台车床加工同一型号的零件，第1台加工的次品率为6%，第2、3台加工的次品率均为5%；加工出来的零件混放在一起，且第1、2、3台车床加工的零件数分别占总数的25%、30%、45%。现从加工出来的零件中任取一个零件，则取到的零件是次品的概率为 ()

- A. 0.0415 B. 0.0515 C. 0.0425 D. 0.0525

【习题3】 难度 ★☆☆

某批产品来自A、B两条生产线，A生产线占60%，次品率为4%；B生产线占40%，次品率为5%，现随机抽取一件进行检测，若抽到的是次品，则它来自A生产线的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{6}{11}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{9}$



5.2.1.5 事件的独立性

目标、菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

(多选) 抛掷一枚质地均匀的骰子所得的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 令事件 $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2\}$, 则下列说法中错误的有 ()

- A. A 与 B 独立 B. A 与 C 独立
C. B 与 C 独立 D. $C \subseteq B$

【习题2】 难度 ★★★

如果 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 分别是 A 、 B 的对立事件, 下列选项中能判断事件 A 与事件 B 相互独立的是

- ()
A. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$ B. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$
C. $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ D. $P(B|A) = P(A|B)$

【习题3】 难度 ★★★

在一个质地均匀的正四面体木块的四个面上分别标有数字 1, 2, 3, 4. 连续抛掷这个正四面体木块两次, 并记录每次正四面体木块朝下的面上的数字, 记事件 A 为“两次记录的数字之和为奇数”, 事件 B 为“第一次记录的数字为奇数”, 事件 C 为“第二次记录的数字为偶数”, 则下列结论正确的是 ()

- A. 事件 B 与事件 C 是对立事件
B. 事件 A 与事件 B 不是相互独立事件
C. $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$
D. $P(ABC) = \frac{1}{8}$



5.2.1.6 条件概率多选题与应试思维综合应用

【习题1】 难度 ★☆☆

(多选) 甲罐中有5个红球, 5个白球, 乙罐中有3个红球, 7个白球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 再从乙罐中随机取出一球. A_1 表示事件“从甲罐取出的球是红球”, A_2 表示事件“从甲罐取出的球是白球”, B 表示事件“从乙罐取出的球是红球”. 则下列结论正确的是 ()

A. A_1, A_2 为对立事件

B. $P(B|A_1) = \frac{4}{11}$

C. $P(B) = \frac{3}{10}$

D. $P(B|A_1) + P(B|A_2) = 1$

【习题2】 难度 ★☆☆

(多选) 两批同种规格的产品, 第一批占40%, 次品率为3%; 第二批占60%, 次品率为2%, 则 ()

A. 从两批产品中各取1件, 都取到次品的概率为0.06%

B. 从两批产品中各取1件, 都取到次品的概率为2.4%

C. 两批产品混合后任取1件, 该产品是次品的概率为2.4%

D. 两批产品混合后任取1件, 若取到的是次品, 则它取自第一批产品的概率为0.3%

【习题3】 难度 ★☆☆

(多选) 已知随机事件 A, B 满足 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.5$, 则下列说法正确的是 ()

A. 若 A, B 相互独立, 则 $P(AB) = 0.2$ B. 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = 0.4$

C. 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A|B) = \frac{4}{5}$

D. 若 $P(B|A) = 0.25$, 则 $P(B|\bar{A}) = \frac{2}{3}$

5.2.2 离散型随机变量及其分布列



5.2.2.1 随机变量的概念与简单分布列

提高专属

【习题1】 难度☆☆☆

下列事件中,是随机事件的是 ()

- ①经过有交通信号灯的路口,刚好是红灯;
 ②投掷2颗质地均匀的骰子,点数之和为14;
 ③抛掷一枚质地均匀的硬币,字朝上;
 ④13个人中至少有2个人的生日在同一个月.

A. ①③

B. ③④

C. ①④

D. ②③

【习题2】 难度☆☆☆

袋中有3个白球、5个黑球,从中任取2个,可以作为随机变量的是 ()

- A. 至少取到1个白球
 B. 至多取到1个白球
 C. 取到白球的个数
 D. 取到的球的个数

【习题3】 难度☆☆☆

已知某离散型随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1
P	$3q^2$	$2q$

则 $q =$ ()A. $\frac{1}{3}$ 和 -1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. -1

5.2.3 离散型随机变量的数字特征



5.2.3.1 期望

【习题1】

(2022 年全国高考甲卷理科高考真题第 19 题) 甲、乙两个学校进行体育比赛, 比赛共设三个项目, 每个项目胜方得 10 分, 负方得 0 分, 没有平局. 三个项目比赛结束后, 总得分高的学校获得冠军. 已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5, 0.4, 0.8, 各项的比赛结果相互独立.

- (1) 求甲学校获得冠军的概率;
(2) 用 X 表示乙学校的总得分, 求 X 的分布列与期望.



5.2.3.2 方差与标准差

【习题1】 难度 ★★★

已知离散型随机变量 X 的方差为 2, 则 $D(3X+2) =$ ()

- A. 6 B. 8 C. 18 D. 20

【习题2】 难度 ★★★

设 X 只取两个值 0, 1, 并且 $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$, $p \in (0, 1)$, 则 $D(X)$ 的最大值为

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

【习题3】 难度 ★★★

某经营礼品花卉的店主记录了去年当中 100 天的 A , B 两种花卉每枝的收益情况, 如表所示:

A 种花卉:

收益 x (元)	-1	0	2
天数	10	30	60

B 种花卉:

收益 y (元)	0	1	2
天数	30	30	40

如果店主向你咨询, 明年就经营一种花卉, 你会给出怎样的建议呢?



5.2.3.3 【数学思维】数字特征的意义与策略的应用

目标、菁英专属

【习题1】 难度 ★★★

有机蔬菜，是指在蔬菜生产过程中严格按照有机生产规程，禁止使用任何化学合成的农药、化肥、生长调节剂等化学物质，以及基因工程生物及其产物，而是遵循自然规律和生态学原理，采取一系列可持续发展的农业技术，协调种植平衡，维持农业生态系统持续稳定，且经过有机食品认证机构鉴定认证，并颁发有机食品证书的蔬菜产品。为满足当地市民对有机蔬菜的需求，某超市引进 A, B 两类有机蔬菜。在当天进货都售完的前提下， A 类有机蔬菜的纯利润为 3 元/千克， B 类有机蔬菜的纯利润为 5 元/千克。若当天出现未售完的有机蔬菜，次日将以 5 折售出，此时售出的 A 类蔬菜的亏损为 1 元/千克， B 类蔬菜的亏损为 3 元/千克。已知当天未售完的有机蔬菜，次日 5 折促销都能售完。假设该超市 A, B 两类有机蔬菜当天共进货 100 千克，其中 A 类有机蔬菜进货 $x (x \in N, 30 \leq x \leq 70)$ 千克。

(1) 假设 A, B 类有机蔬菜进货当天可售完的质量均为 50 千克。

① 试求进货当天及次日该超市这两类有机蔬菜的总盈利 $f(x)$ (单位：元) 的表达式；

② 若 $f(x) \geq 340$ ，求 x 的取值范围。

(2) 设 A, B 类有机蔬菜进货当天可售完的质量 (单位：千克) 分别为 X, Y 且随机变量 X, Y 的分布列分别如下表所示。

X	50	60
P	0.8	0.2

Y	50	60
P	0.7	0.3

以该超市这两类有机蔬菜总盈利的数学期望为依据，你认为 A 类有机蔬菜当天的进货量在 45 千克和 55 千克中应该选哪一个？



5.2.3.4 【数学思维】实际问题中复杂概率的计算

目标专属

【习题1】

甲、乙两人进行猜灯谜游戏，每次同时猜同一个灯谜，若一方猜对且另一方猜错，则猜对一方获胜，且获胜一方得1分，失败一方得-1分；若两人都猜对或两人都猜错，则为平局，两人都得0分。已知猜灯谜游戏中，甲、乙每次猜对的概率分别为 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{2}{3}$ ，且甲、乙猜对与否互不影响，每次猜灯谜游戏也互不影响。

- (1) 求1次猜灯谜游戏中，甲得分的分布列与数学期望；
- (2) 设3次猜灯谜游戏后累计得分为正者获胜，求甲获胜的概率。

5.2.4 二项分布与超几何分布



5.2.4.1 两点分布

提高专属

【习题1】 难度 ★☆☆

设随机变量 X 服从两点分布, 若 $P(X=1) - P(X=0) = 0.3$, 则成功概率 $P(X=1) =$ ()

A. 0.3

B. 0.35

C. 0.65

D. 0.7

【习题2】 难度 ★☆☆

若随机变量 X 服从两点分布, 其中 $P(X=0) = \frac{1}{3}$, 则 $D(X) =$ ()

A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

【习题3】 难度 ★☆☆

已知离散型随机变量 X 的分布列服从两点分布, 满足 $P(X=0) = \frac{2}{9P(X=1)}$, 且 $P(X=0) < P(X=1)$, 则 $E(X) =$ ()

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$



5.2.4.2 二项分布

【习题1】 难度 ★☆☆

抽奖一次中奖的概率是 90%，5 个人各抽奖一次恰有 3 人中奖的概率为 ()

- A. $C_5^3 \times 0.9^2 \times 0.1^3$ B. $(1-0.9)^3 \times 0.1^2$
 C. $1 - C_5^3 \times 0.9^3 \times 0.1^2$ D. $C_5^3 \times 0.9^3 \times 0.1^2$

【习题2】 难度 ★☆☆

若随机变量 $X \sim B(n, p)$ ，且 $E(X) = 6$ ， $D(X) = 5$ ，则 p 的值为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{6}$

【习题3】 难度 ★☆☆

福州纸伞是历史悠久的中国传统手工艺品，属于福州三宝之一，纸伞的制作工序大致分为三步：第一步削伞架，第二步裱伞面；第三步绘花刷油。一个优秀的作品除了需要有很好的素材外，更要有制作上的技术要求，已知某工艺师在每个环节制作合格的概率分别为 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{4}{5}$ ， $\frac{2}{3}$ ，只有当每个环节制作都合格才认为一次成功制作，若该工艺师制作 4 次，其中优秀作品数为 X ，求 X 概率分布列及期望。



5.2.4.3 超几何分布

【习题1】 难度 ★★★

在箱子中有 10 个小球，其中有 3 个红球，3 个白球，4 个黑球。从这 10 个球中任取 3 个，求：

- (1) 取出的 3 个球中红球的个数 X 的分布列；
- (2) 取出的 3 个球中红球个数多于白球个数的概率。



5.2.4.4 【数学思维】几何分布

目标专属

【习题1】

难度 ★★★

在成功概率为 p ($0 < p < 1$) 的伯努利试验中, 记 X 为首次成功时所需的试验次数, X 的取值为所有正整数, 此时称离散型随机变量 X 的概率分布为几何分布. 若抽球一直进行下去, 则 X 服从几何分布.

①求恰好第 k 次成功的概率 $P(X=k)$;

②求 $E(X)$.

5.2.5 正态分布



5.2.5.1 正态分布

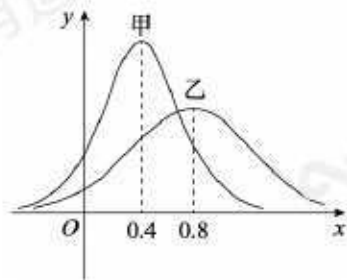
【习题1】 基础☆☆☆

已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, $P(X \geq 4) = 0.2$, 则 $P(0 < X < 2) =$ ()

- A. 0.2 B. 0.3 C. 0.5 D. 0.8

【习题2】 基础☆☆☆

甲、乙两类水果的质量 (单位: kg) 分别服从正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 其相应的分布密度曲线如图所示, 则下列说法正确的是 ()



- A. 甲类水果的平均质量比乙类水果的平均质量大
 B. 乙类水果的质量比甲类水果的质量更集中于均值左右
 C. 水果的质量服从的正态分布的参数 $\sigma_1 > \sigma_2$
 D. 甲类水果的平均质量 $\mu_1 = 0.4\text{kg}$

【习题3】 基础☆☆☆

据统计, 在某次联考中, 考生数学单科分数 X 服从正态分布 $N(90, 20^2)$, 考生共 50000 人, 估计数学单科分数在 130 ~ 150 分的学生人数约为 ()

(附: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$)

- A. 1070 B. 2140 C. 4280 D. 6795



5.2.5.2 标准正态分布

目标专属

【习题1】 难度 ★☆☆

随机变量 ξ 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 已知 $P(\xi \leq -1.96) = 0.025$, 则 $P(|\xi| < 1.96)$ 等于

A. 0.025

B. 0.050

C. 0.950

D. 0.975

【习题2】 难度 ★★☆☆

今年是农历癸卯兔年, 一种以兔子形象命名的牛奶糖深受顾客欢迎. 标识质量为 500g 的这种袋装奶糖的质量指标 X 是服从正态分布 $N(500, 2.5^2)$ 的随机变量. 若质量指标介于 495g (含) 至 505g (含) 之间的产品包装为合格包装, 则随意买一包这种袋装奶糖, 是合格包装的可能性大小为 _____ % (结果保留一位小数)

(已知 $\Phi(1) \approx 0.8413$, $\Phi(2) \approx 0.9772$, $\Phi(3) \approx 0.9987$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的密度函数从 $-\infty$ 到 x 的累计面积)

【习题3】 难度 ★★☆☆

高考是全国性统一考试, 因考生体量很大, 故高考成绩近似服从正态分布. 一般正态分布可以转化为标准正态分布, 即若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 令 $Y = \frac{Z - \mu}{\sigma}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$, 且 $P(Z \leq a) = P(Y \leq \frac{a - \mu}{\sigma})$.

已知选考物理考生总分 Z 的全省平均分为 460 分, 该次考试的标准差 σ 为 40, 现从选考物理的考生中随机抽取 30 名考生成绩作进一步调研, 记 t 为这 30 名考生分数超过 520 分的人数, 则 $P(t \geq 1) =$ _____

参考数据: 若 $Y \sim N(0, 1)$, 则 $P(Y \leq 1.5) = 0.9332$, $0.9332^{30} \approx 0.1257$.

A. 0.8743

B. 0.1257

C. 0.9332

D. 0.0668



5.2.5.3 概率统计多选题与应试思维综合应用

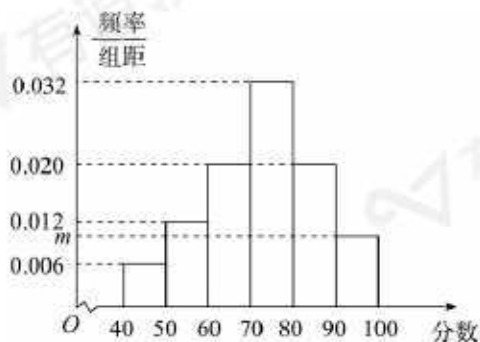
【习题1】 难度☆☆☆

(多选) 有一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, 平均数为 2024, 则 ()

- A. 2024, $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均数
- B. 2024, $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的中位数等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的中位数
- C. 2024, $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的标准差不小于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的标准差
- D. 2024, $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的极差等于 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的极差

【习题2】 难度☆☆☆

(多选) 某地发起“寻找绿色合伙人——低碳生活知识竞赛”活动, 从参赛选手的答卷中随机抽取了 100 份, 将成绩分成 6 组, 第 1 组为 $[40, 50)$, 第 2 组为 $[50, 60)$, $\dots$, 第 6 组为 $[90, 100]$, 画出如图所示的频率分布直方图, 则 ()



- A. $m=0.01$
- B. 第 6 组有 15 个样本
- C. 从第 5, 6 组中, 按组别分层抽取 6 个样本, 则应在第 5 组抽取 3 个样本
- D. 估计参赛选手成绩的中位数在 $[70, 80)$ 内

【习题3】

(多选) 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 可以不经过样本中心
- B. 可以用相关系数 r 刻画两个变量的相关程度强弱, r 值越大两个变量的相关程度越强
- C. 残差图中, 残差点所在的水平带状区域越窄, 则回归方程的预报精确度越高
- D. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 4.712$, 根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的 χ^2 独立性检验 ($\chi_{0.05}^2 = 3.841$), 可判断 X 与 Y 有关联, 此推断犯错误的概率不超过 0.05

5.3 成对数据的统计分析

5.3.1 成对数据的统计相关性



5.3.1.1 相关系数的计算

提高专属

【习题1】 难度 ★★★

“十四五”规划纲要提出，全面推动长江经济带发展，协同推动生态环境保护和经济发展。长江水资源约占全国总量的36%，长江流域河湖、水库、湿地面积约占全国的20%，珍稀濒危植物约占全国的39.7%，淡水鱼类约占全国的33%，长江经济带在我国生态文明建设中占据重要位置。长江流域某地区经过治理，生态系统得到很大改善，水生动物数量有所增加。为调查该地区A种水生动物的数量，将其分成面积相近的100个小水域，从这些小水域中用简单随机抽样的方法抽取20个作为样本，调查得到样本数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$ ，其中 x_i 和 y_i 分别表示第*i*个样本区域的水草覆盖面积(单位：公顷)和A种水生动物的数量，并计算得

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 60, \sum_{i=1}^{20} y_i = 1200, \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 120, \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 9000, \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1000.$$

- (1) 求该地区A种水生动物数量的估计值(A种水生动物数量的估计值等于样本区域A种水生动物数量的平均数乘以小水域数)；
- (2) 求样本 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$ 的相关系数(精确到0.01)；
- (3) 根据现有统计资料，各地块间水草覆盖面积差异很大。为提高样本的代表性以获得该地区A种水生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法，并说明理由。

附：相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{3} \approx 1.732.$

5.3.2 一元线性回归模型及其应用



5.3.2.1 线性回归方程的计算

提高专属

【习题1】 基础☆☆☆

某收费 APP(手机应用程序)自上架以来,凭借简洁的界面设计、方便的操作方式和强大的实用功能深得用户的喜爱.该 APP 所在的公司统计了用户一个月月租减免的费用 x (单位:元)及该月对应的用户数量 y (单位:万人),得到如下数据表格:

用户一个月月租减免的费用 x (元)	3	4	5	6	7
用户数量 y (万人)	1	1.1	1.5	1.9	2.2

已知 x 与 y 线性相关.

- (1)求 y 关于 x 的线性回归方程 ($\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 135$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 41.7$);
- (2)据此预测,当月租减免费用为 10 元时,该月用户数量为多少?

参考公式:对于一组具有线性相关关系的数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 其回归直线 $y = bx + a$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

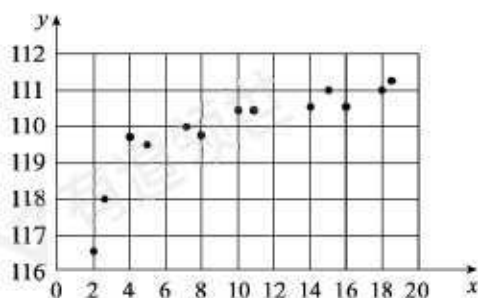


5.3.2.2 非线性回归方程的计算

目标专属

【习题1】

2022年2月4日至2月20日第24届冬奥会在北京举行,本届冬奥会吉祥物“冰墩墩”自亮相以来就好评不断,一个原因是主办方的广泛宣传.某课外学习小组通过收集整理出了宣传力度(x)与好评量(y)之间的散点图(如图所示),根据散点图中的数据,令 $s = \sqrt{x}$, $t = \frac{1}{x}$ 统计整理得到 (s_i, y_i) 与 (t_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 13$) 的如下数据表(如图所示),现计划用 $y = a + b\sqrt{x}$ 或 $y = c + \frac{d}{x}$ 建立 y 关于 x 的回归方程.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{s}$	$\bar{t}$	
10.15	109.94	3.04	0.16	
$\sum_{i=1}^n s_i y_i - 13 \bar{s} \cdot \bar{y}$	$\sum_{i=1}^{13} t_i y_i - 13 \bar{t} \cdot \bar{y}$	$\sum_{i=1}^{13} s_i^2 - 13 \bar{s}^2$	$\sum_{i=1}^{13} t_i^2 - 13 \bar{t}^2$	$\sum_{i=1}^{13} y_i^2 - 13 \bar{y}^2$
13.94	-2.1	11.67	0.21	21.22

- (1) 设 (s_i, y_i) 与 (t_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 13$) 的相关系数分别为 r_1, r_2 , 求 r_1, r_2 的值并根据其意义判断哪种模型更合适建立 y 与 x 的回归方程, 请求出该方程;

附: 参考数据和公式: $\sqrt{4.4562} = 2.1109$, $\sqrt{247.6374} = 15.7365$, 回归直线方程 $v = \alpha + \beta u$

的斜率和截距的最小二乘法估计分别为: $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u} \cdot \bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$, 相关系数计算公式:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u} \cdot \bar{v}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2 - n\bar{v}^2}}$$

5.3.3 列联表与独立性检验



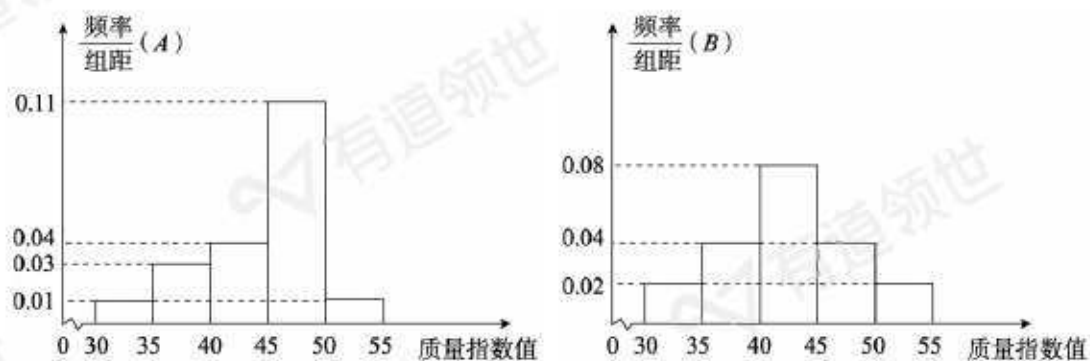
5.3.3.1 卡方独立性检验

提高、目标专属

【习题1】

★★★

随着人们生活水平的提高，国家倡导绿色安全消费，菜篮子工程从数量保障型转向质量效益型，为了测试A、B两种不同有机肥料的使用效果，某科研单位用黄瓜做对比实验，分别在两片实验区各摘取100个，对其质量的某项指标值进行检测，质量指数达到45及以上的为“质量优等”，由测量结果绘成频率分布直方图，其中质量指标值分组区间是 $[30, 35)$ ， $[35, 40)$ ， $[40, 45)$ ， $[45, 50)$ ， $[50, 55]$ 。



- (1) 分别求A实验区黄瓜质量指数的平均数和中位数；(每组数据以区间的中点值为代表，结果保留小数点后一位有效数字)
- (2) 请根据题中信息完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有99.9%的把握认为“质量优等”与使用肥料有关。

	A 有机肥料	B 有机肥料	合计
质量优等			
质量非优等			
合计			

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d$$

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828